

Transponering-

Def. Transponerten  $A^T$  av en matris  $A$  fås genom att byta plats på rader och kolonner.

Kommentarer

\*  $A$   $m \times n$ -matris  $\Rightarrow A^T$   $n \times m$ -matris

\* Om  $A = A^T$  sägs  $A$  vara symmetrisk.

Ex

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

↑  
för  $n \times n$ -matriser speglar vi  
i diagonalen.

Räknelagar

$$(i) (A^T)^T = A$$

$$(ii) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(iii) (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(iv) (AB)^T = B^T A^T \leftarrow \text{OBS: ordningen!}$$

## Linjära ekvationssystem på matrisform

(2)

Som vi har sett tidigare kan linjära ekvationssystem skrivas med hjälp utav matriser.

Ex

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 7x_3 = -2 \\ 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\underline{Y}}$$

Alternativt

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

eller på vektorform

$$x_1(1, -1, 0) + x_2(-1, 0, 2) + x_3(2, 7, 1) = (4, -2, 8).$$

Kommentar Vektorerna  $(1, -1, 0)$ ,  $(-1, 0, 2)$  och  $(2, 7, 1)$

kallas för kolonnvektorerna till  $A$ .

Sats 1 (se boken s. 127)

För varje kvadratisk matris  $A$  (dvs  $n \times n$ -matris) gäller att följande är ekvivalent:

- (a)  $A$ 's kolonnvektorer är en bas.
- (b)  $A\underline{X} = \underline{0}$  har endast lösningen  $\underline{X} = \underline{0}$ .
- (c)  $A\underline{X} = \underline{Y}$  har lösning för varje  $\underline{Y}$ .

Bevis (av sats 1).

③

Låt  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$  vara  $A$ 's kolonnvektorer (dvs  $A = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$ ).

(b)  $\Leftrightarrow x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n = \bar{0}$  har endast lösningen  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

$\Leftrightarrow \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$  är linjärt oberoende. (b')

(c)  $\Leftrightarrow$  varje  $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$  kan skrivas som  $\bar{y} = x_1 \bar{a}_1 + x_2 \bar{a}_2 + \dots + x_n \bar{a}_n$

$\Leftrightarrow \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$  spänner upp  $\mathbb{R}^n$ . (c')

Dvs, Sats 1 är bara en omformulering av basatsen i  $\mathbb{R}^n$

(se F7, s. 8, påstående (ii)) och därmed är

(a)  $\Leftrightarrow$  (b')  $\Leftrightarrow$  (c').

□

Invers matris

Ex  $12x = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{12} \cdot 12x = \frac{1}{12} \cdot 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{12}$ .

Fråga Kan vi göra samma sak för  $n \times n$ -matriser?

(dvs  $A\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow BA\bar{x} = B\bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} = B\bar{y}$ ).

Svar Ibland...

Först måste vi finna en "1:a" för matriser.

Def- Enhetsmatris:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

(en  $n \times n$ -matris med ettor på diagonalen och alla andra element är noll).

Då gäller  $AI = A$  och  $IA = A$

Def- Vi säger att  $n \times n$ -matrisen  $A$  är inverterbar om det finns en matris  $A^{-1}$  som uppfyller

(4)

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I.}$$

$A^{-1}$  kallas för inversen till  $A$ .

Ex Matrisen  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  har inversen  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ .

(kolla själva att  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ).

Lemma 1 Om  $A$  är inverterbar så är inversen entydig:

Bevis Antag att  $AB = BA = I$  och  $AC = CA = I$ .

$$\Rightarrow B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

$\Rightarrow$  Finns bara en matris  $A^{-1}$  ( $= B = C$ ) som uppfyller  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ .

□

Räknelagar

$$(i) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(ii) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(iii) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \leftarrow \text{OBS: ordningen!}$$

Bevis Läs själva s. 130 - 131 i boken.

Kommentar  $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$  (gäller ju inte ens för  $1 \times 1$  matriser...)

Lemma 2  $AH=I$  eller  $VA=I \Rightarrow A$  är inverterbar  
(med  $A^{-1}=H=V$ ).

(5)

Bevis Följer ur Sats 1 i  $\mathbb{R}^n$  (se tex s. 132-133 i boken).

Kommentar: För att hitta  $A^{-1}$  behöver vi bara leta efter "ena sidan",  
dvs finn matrisen  $A^{-1}$  så att  $AA^{-1}=I$  eller  $A^{-1}A=I$ .

Sats 2 För varje  $n \times n$ -matris  $A$  är följande ekvivalent:

- (a)  $A$ 's kolonnvektorer är en bas.
  - (b)  $A\bar{x} = 0$  har endast lösningen  $\bar{x} = 0$ .
  - (c)  $A\bar{x} = \bar{y}$  har lösning för varje  $\bar{y}$ .
  - (d)  $A$  är inverterbar.
- } Sats 1, s. 2

Bevis Enligt sats 1 är (a)  $\Leftrightarrow$  (b)  $\Leftrightarrow$  (c).

(d)  $\Rightarrow$  (b):  $A\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I}\bar{x} = \underbrace{A^{-1}0}_{=0} \Leftrightarrow \bar{x} = 0$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d): Först  $2 \times 2$ -fallet:

Det finns  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  som löser  $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  och  $A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$\Rightarrow A \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow H = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  uppfyller  $AH=I$   
 $\uparrow$   
enligt def. av matrismult.

$\Rightarrow A$  är inverterbar.  
 $\uparrow$   
Lemma 2

Precis samma teknik fungerar i det allmänna  $n \times n$ -fallet.  $\square$

## Beräkning av $A^{-1}$

6

Ex Beräkna inversen till  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  (om den existerar)

Lösning -  $A\bar{x} = \underline{y} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I} \bar{x} = \underline{A^{-1}y}$

Sätt  $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  och  $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ :

$$A\bar{x} = \underline{y} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 \\ 5x_1 + 3x_2 = y_2 \end{cases} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 \\ \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{2}y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 - x_2) = \frac{1}{2}(y_1 + 5y_1 - 2y_2) = 3y_1 - y_2 \\ x_2 = -5y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{\underline{y}}$$

Svar:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ . koll:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex Invers till  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ?

Lösning -  $A\bar{x} = \underline{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 = y_2 \end{cases} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 0 = -2y_1 + y_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Systemet är inte lösbart för varje  $\underline{y}$  (bara de som uppfyller  $0 = -2y_1 + y_2 \dots$ )  $\Rightarrow A$  är inte inverterbar.

Ex Beräkna inversen till  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

(7)

Lösning - Vi utför beräkningen utan "x och y":

$$AX = Y \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \textcircled{-3} \\ \leftarrow \end{array}$$

$\underbrace{\quad}_A \quad \underbrace{\quad}_I$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \cdot \textcircled{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \leftarrow \textcircled{-2}$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$\underbrace{\quad}_I \quad \underbrace{\quad}_{A^{-1}}$

Svar  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

Dus vi går ifrån  $[A|I]$  till  $[I|A^{-1}]$ .