F6 Skalär- och vektor-produkter

Vi fortsätter med några tillämpningar av projektionsformeln (F5, s. 2). Alla koordinatsystem antags framöver vara ortonormerade.

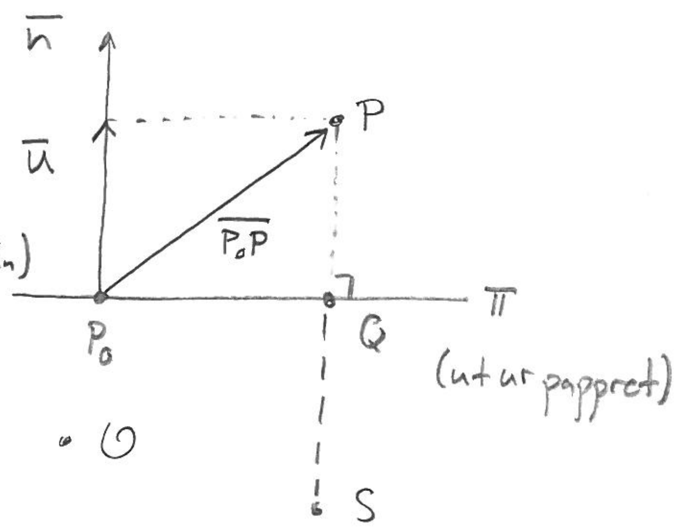
Projektion och spegling i plan

Ex 1 Bestäm den ortogonala projektionen Q och spegelbilden S av punkten $P: (2,-3,1)$ i planet $\Pi: 2x-2y+z-5=0$.

Lösning

Välj en punkt i Π t ex $P_0: (0,0,5)$ och notera att $\bar{n} = (2,-2,1)$. Med

$$\bar{u} = \frac{\overline{P_0P} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2}\,\bar{n} \quad \text{(projektionsformeln)}$$



får vi

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ} = \overline{OP} - \bar{u}$$

$$\overline{OS} = \overline{OP} + \overline{PS} = \overline{OP} - 2\bar{u}.$$

Här är $\overline{P_0P} = \overline{OP} - \overline{OP_0} = (2,-3,1) - (0,0,5) = (2,-3,-4)$ och

$$\bar{u} = \frac{(2,-3,-4)\cdot(2,-2,1)}{|(2,-2,1)|^2}(2,-2,1) = \frac{4+6-4}{4+4+1}(2,-2,1) = \frac{2}{3}(2,-2,1)$$

$\Rightarrow$

$$\overline{OQ} = (2,-3,1) - \frac{2}{3}(2,-2,1) = \frac{1}{3}(2,-5,1)$$

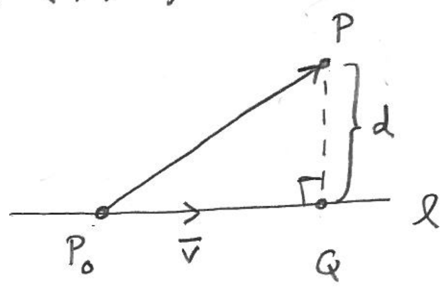
$$\overline{OS} = (2,-3,1) - \frac{4}{3}(2,-2,1) = -\frac{1}{3}(2,1,1).$$

Svar: $Q: \frac{1}{3}(2,-5,1)$ och $S: -\frac{1}{3}(2,1,1)$.

Avstånd mellan punkt/linje.

Ex 2 Bestäm det minsta avståndet d mellan punkten $P:(3,1,2)$ och linjen $\ell:(x,y,z)=(1,2,-1)+t(2,2,-1)$, $t\in\mathbb{R}$.

Lösning. Välj en punkt på ℓ tex $P_0:(1,2,-1)$ och notera att $\bar{v}=(2,2,-1)$.



Vi söker $d=|\overline{QP}|$:

$$\overline{P_0P}=\overline{P_0Q}+\overline{QP} \Rightarrow$$

$$\overline{QP}=\overline{P_0P}-\overline{P_0Q} \quad \text{och} \quad \overline{P_0Q}=\frac{\overline{P_0P}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\bar{v}.$$

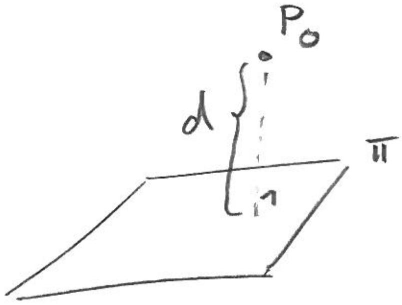
Här är $\overline{P_0P}=(3,1,2)-(1,2,-1)=(2,-1,3)$ och

$$\overline{P_0Q}=\frac{(2,-1,3)\cdot(2,2,-1)}{|(2,2,-1)|^2}\bar{v}=\frac{4-2-3}{4+4+1}\bar{v}=-\frac{1}{9}(2,2,-1).$$

$$\Rightarrow \overline{QP}=(2,-1,3)-\frac{-1}{9}(2,2,-1)=\frac{1}{9}(20,-7,26)$$

$$\Rightarrow \underline{d}=|\overline{QP}|=\frac{1}{9}\sqrt{1125}=\underline{\frac{5\sqrt{5}}{3}\ \text{l.e.}}$$

Avstånd mellan punkt/plan



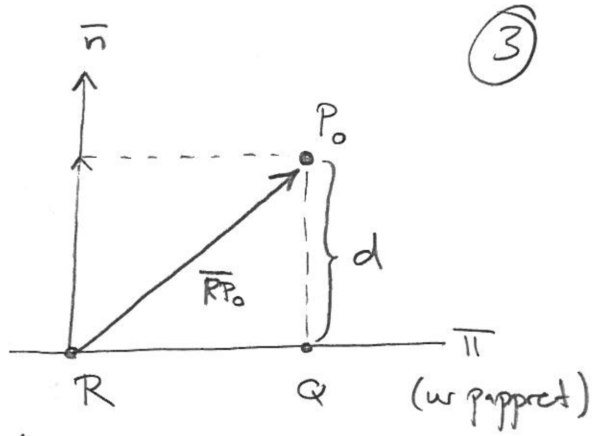
Sats Det minsta avståndet mellan punkten $P_0:(x_0,y_0,z_0)$ och planet $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ ges av

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}.$$

Kommentar Motsvarande gäller punkt/linje i planet (se boken s. 78).

<u>Bevis</u> (av satsen s. 2)

Välj en punkt $R:(x_1,y_1,z_1)$ i Π och notera att $\bar{n}=(A,B,C)$.



$$d = |\overline{QP_0}| = \Big|\underbrace{\frac{\overline{RP_0}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}}_{\text{tal}}\bar{n}\Big| = \frac{|\overline{RP_0}\cdot\bar{n}|}{|\bar{n}|}\cdot\cancel{\frac{|\bar{n}|}{|\bar{n}|}}.$$

Här är $\overline{RP_0}=\overline{OP_0}-\overline{OR}=(x_0,y_0,z_0)-(x_1,y_1,z_1)=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$,

$$\begin{aligned}\overline{RP_0}\cdot\bar{n} &= (x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)\cdot(A,B,C)\\ &= (x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B+(z_0-z_1)C\\ &= Ax_0+By_0+Cz_0-\underbrace{(Ax_1+Bx_2+Cz_1)}_{=-D \text{ då } R\in\Pi}.\end{aligned}$$

och

$$|\bar{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

$$\Rightarrow \quad d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad \square$$

<u>Vektorprodukter</u>

<u>Rep</u> $\bar{u},\bar{v}$ vektorer i planet eller rummet.

<u>Skalärprodukt</u>: $\bar{u}\cdot\bar{v}=|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$.

Vi ska nu införa en ny slags produkt mellan vektorer $\bar{u}$ och $\bar{v}$ <u>i rummet</u> som vi betecknar $\bar{u}\times\bar{v}$ och är <u>en vektor</u>.

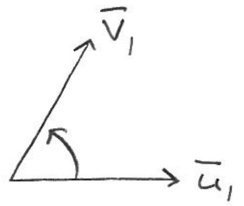
<u>OBS</u> Finns ingen motsvarighet i planet!

Innan vi definierar vektorprodukten $\bar{u} \times \bar{v}$ behöver vi några nya begrepp:

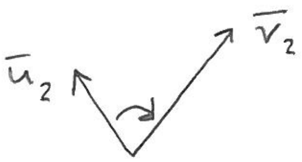
<u>Def</u> Låt $\bar{u}$ och $\bar{v}$ vara två icke-parallella vektorer. $\bar{u}$ och $\bar{v}$ sägs vara <u>positivt orienterade</u> om den minsta vridningen som tar $\bar{u}$ till $\bar{v}$ sker <u>moturs</u>.

<u>OBS</u> ordningen spelar roll!

<u>Ex 3</u>



$\bar{u}_1, \bar{v}_1$ är positivt orienterade.



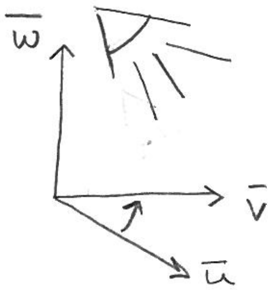
$\bar{u}_2, \bar{v}_2$ är negativt orienterade.

(moturs)

<u>Def</u> Låt $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ vara tre vektorer i rummet som inte ligger i samma plan. Då sägs $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ vara <u>positivt orienterade</u> om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är positivt orienterade sett <u>ifrån spetsen</u> av $\bar{w}$.

<u>Ex 4</u> $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ är positivt orienterade.

$\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}$ är negativt —//—.

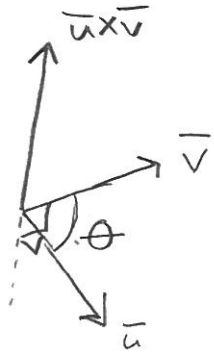


<u>Def</u> För två vektorer $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$ <u>i rummet</u> definierar vi vektorprodukten $\bar{u} \times \bar{v}$ som vektorn med följande egenskaper:

(i) $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta$

(ii) $\bar{u} \times \bar{v}$ är ortogonal mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$

(iii) $\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v}$ är positivt orienterade.

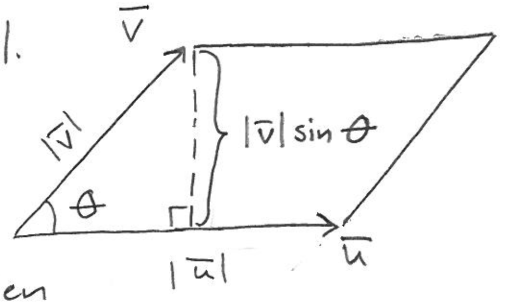


Om $\bar{u}$ eller $\bar{v} = \bar{0}$ sätter vi $u \times \bar{v} = \bar{0}$.

Kommentarer: Orienteringen krävs för att $\bar{u}\times\bar{v}$ ska bli unik!

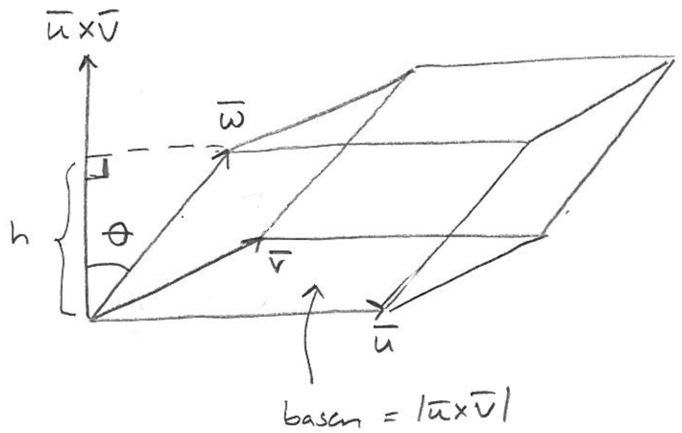
* Längden $|\bar{u}\times\bar{v}|$ kan tolkas som arean A av parallellogrammet som spänns upp av $\bar{u}$ och $\bar{v}$:

$$A = \text{basen} \cdot \text{höjden} = |\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta = |\bar{u}\times\bar{v}|.$$



* Vi kan också beräkna volymen V av den parallellepiped som spänns upp av $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$:

$$h = \begin{cases} |\bar{w}| \cos\theta & \text{då } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ -|\bar{w}| \cos\theta & \text{då } \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi. \end{cases}$$



positivt tal

$$V = \text{basen} \cdot \text{höjden}$$

$$= |\bar{u}\times\bar{v}| \cdot \big|\, |\bar{w}| \cos\theta \,\big| = |(\bar{u}\times\bar{v}) \cdot \bar{w}|$$

def. av skalärprodukten!

* Talet $(\bar{u}\times\bar{v}) \cdot \bar{w}$ kallas för den skalära trippelprodukten och

$$\bar{u}\times\bar{v} \cdot \bar{w} = \begin{cases} V & \text{om } \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \text{ är positivt orienterade} \\ -V & \text{—//—— negativt orienterade.} \end{cases}$$

(jfr sats 2, s. 86 i boken).

Läs själva sats 3, s. 86 i boken.

Räknelagar för vektorprodukter

Sats (s. 87 i boken)

(i) $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0} \iff \bar{u} \parallel \bar{v}$.

(ii) $\bar{v} \times \bar{u} = -\bar{u} \times \bar{v}$ $\longleftarrow$ jfr med $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$

(iii) $(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \times \bar{v} = \bar{u}_1 \times \bar{v} + \bar{u}_2 \times \bar{v}$

$\bar{u} \times (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{u} \times \bar{v}_1 + \bar{u} \times \bar{v}_2$

(iv) $(\lambda \bar{u}) \times \bar{v} = \lambda(\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{u} \times (\lambda \bar{v})$.

Ex 5 Beräkna $(\bar{u} + \bar{v}) \times (\bar{u} - \bar{v})$.

Lösning – $\underline{(\bar{u} + \bar{v}) \times (\bar{u} - v)} = \bar{u} \times (\bar{u} - \bar{v}) + \bar{v} \times (\bar{u} - \bar{v})$

$$= \bar{u} \times \bar{u} + \bar{u} \times (-\bar{v}) + \bar{v} \times \bar{u} + \bar{v} \times (-\bar{v})$$

$$= \underbrace{\bar{u} \times \bar{u}}_{=\bar{0}} - \bar{u} \times \bar{v} - \bar{u} \times \bar{v} - \underbrace{\bar{v} \times \bar{v}}_{=\bar{0}} = \underline{-2\bar{u} \times \bar{v}}.$$

kommentar jfr med $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2$.

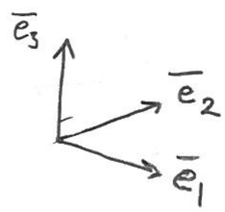
"Koordinaträkning" av vektorprodukter

Som vanligt söker vi efter ett sätt att översätta våra geometriska begrepp till räkning med koordinater, och därför introducerar vi följande typ av bas:

Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vara en bas för rummet som är

(i) Ortonormerad

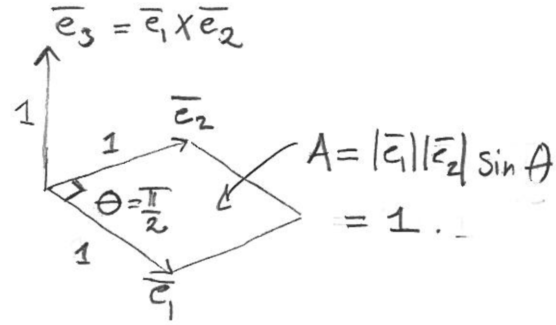
(ii) Positivt orienterad.



kallas ibland för en <u>HON-bas</u> (Högerorienterad-Orto-Normerad)

Enligt vår definition av vektorprodukter gäller då följande:

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \qquad \bar{e}_2 \times \bar{e}_1 = -\bar{e}_3$$
$$\bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \bar{e}_1 \qquad \bar{e}_3 \times \bar{e}_2 = -\bar{e}_1$$
$$\bar{e}_3 \times \bar{e}_1 = \bar{e}_2 \qquad \bar{e}_1 \times \bar{e}_3 = -\bar{e}_2$$



och

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_1 = \bar{e}_2 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_3 = \bar{0}.$$

Om $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$ och $\bar{v} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3$ gäller

$$\begin{aligned}
\bar{u} \times \bar{v} &= (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) \times (y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3) \\
&= x_1y_1 \underbrace{\bar{e}_1 \times \bar{e}_1}_{=\bar{0}} + x_1y_2 \underbrace{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}_{=\bar{e}_3} + x_1y_3 \underbrace{\bar{e}_1 \times \bar{e}_3}_{=-\bar{e}_2} \\
&+ x_2y_1 \underbrace{\bar{e}_2 \times \bar{e}_1}_{=-\bar{e}_3} + x_2y_2 \underbrace{\bar{e}_2 \times \bar{e}_2}_{=\bar{0}} + x_2y_3 \underbrace{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}_{=\bar{e}_1} \\
&+ x_3y_1 \underbrace{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}_{=\bar{e}_2} + x_3y_2 \underbrace{\bar{e}_3 \times \bar{e}_2}_{=-\bar{e}_1} + x_3y_3 \underbrace{\bar{e}_3 \times \bar{e}_3}_{=\bar{0}} \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)\bar{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\bar{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\bar{e}_3
\end{aligned}$$

eller uttryckt i koordinater

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)}$$

<u>OBS</u> Gäller <u>endast</u> för HON-baser!

<u>Läs själva</u> om minnesregler på s. 90 i boken!