F3 | Linjärt beroende och koordinatsystem

(Rep) * Två icke-parallella vektorer är en bas för planet.

* Tre vektorer som inte ligger i samma plan är en bas för rummet.

Fråga Kan vi formulera dessa geometriska villkor på ett mer "räknevänligt" vis?

1) Linjärt beroende

Def. Låt $\bar{v}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p$ vara vektorer. Om det finns reella tal $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ så att

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \ldots + \lambda_p \bar{u}_p$$

säger vi att $\bar{v}$ är en linjärkombination av $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p$.

Ex 1 Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vara en bas för rummet och låt $\bar{u}$ vara en godtycklig vektor.

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ bas $\underset{\text{Sats 3, F2, sidan 8}}{\Rightarrow}$ $\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3$

$\Rightarrow$ $\bar{u}$ är en linjärkombination av $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Ex 2 Är $\bar{v} = (-10, 4, 24)$ en linjärkombination av $\bar{u}_1 = (-1, 2, 3)$ och $\bar{u}_2 = (2, 4, -3)$?

Lösning. Kolla om det finns tal λ_1, λ_2 så att

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 \iff$$

$$(-10, 4, 24) = \lambda_1(-1, 2, 3) + \lambda_2(2, 4, -3) \iff$$

$$(-10, 4, 24) = (-\lambda_1 + 2\lambda_2,\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2,\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2) \iff$$

⇒ Fortsätter på nästa sida

(mera lösning av Ex 2)

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = -10 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 4 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 24 \end{cases} \quad \textcircled{2} \; \textcircled{3} \quad \overset{\text{Gausselimination}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = -10 \\ 8\lambda_2 = -16 \\ 3\lambda_2 = -6 \end{cases} \quad \left(-\tfrac{3}{8}\right)$$

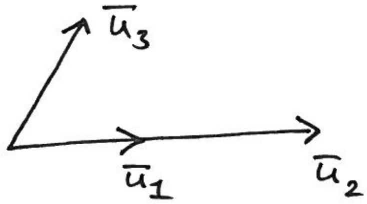
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = -10 \\ \lambda_2 = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2 \\ \lambda_1 = 10 + 2\lambda_2 = 6 . \end{cases}$$

Svar Ja, $\bar{v}$ är en linjärkombination av $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ eftersom $\bar{v} = 6\bar{u}_1 - 2\bar{u}_2$.

Def. Vektorerna $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p$ sägs vara linjärt beroende om någon av dem är en linjärkombination av de övriga. Annars sägs de vara linjärt oberoende.

Ex 3 a) Är $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ linjärt beroende/oberoende?

b) Är $\bar{u}_1, \bar{u}_3$ — // —— ?



Lösning.

a) $\bar{u}_1 \,/\!/\, \bar{u}_2 \Rightarrow$ finns ett tal λ så att $\bar{u}_2 = \lambda \bar{u}_1$

$\Rightarrow \bar{u}_2 = \lambda \bar{u}_1 + 0 \cdot \bar{u}_3$

$\Rightarrow \bar{u}_2$ är en linjärkombination av $\bar{u}_1, \bar{u}_3$,

dvs $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt beroende.

b) $\bar{u}_1, \bar{u}_3$ linjärt beroende $\Leftrightarrow$ finns tal λ så att $\bar{u}_3 = \lambda \bar{u}_1$ (eller $\bar{u}_1 = \lambda \bar{u}_3$)

$\Leftrightarrow \bar{u}_1 \,/\!/\, \bar{u}_3$

Enligt figuren är $\bar{u}_1 \not\parallel \bar{u}_3 \Leftrightarrow \bar{u}_1, \bar{u}_3$ är linjärt oberoende.

Sats 4 (Bassatsen, sidan 34 i boken)

För geometriska vektorer gäller följande:

(i) Två vektorer i planet är en bas <=> de är linjärt oberoende.

(ii) Tre vektorer i rummet är en bas <=> — // ——— .

(iii) a) Fler än två vektorer i planet är linjärt beroende.

b) Fler än tre vektorer i rummet — // ——— .

Bevis Påstående (i) och (ii) kan omformuleras till

(i′) Två vektorer är linjärt beroende <=> de är parallella.

(ii′) Tre vektorer är — // — <=> de ligger i samma plan.

~~[illegible]~~ **Bevis av (i′)**

$\bar{u}_1, \bar{u}_2$ är linjärt beroende $\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}$ $\bar{u}_2 = \lambda \bar{u}_1$ (eller $\bar{u}_1 = \lambda' \bar{u}_2$) $\Leftrightarrow$ $\bar{u}_1 \parallel \bar{u}_2$.

Enligt definitionen av linjärt beroende.

Bevis av (ii′)

$\Rightarrow$) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt beroende $\Rightarrow$ (tex) $\bar{u}_3 = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2$

$\Rightarrow$ $\bar{u}_3$ ligger i planet (alt. linjen om $\bar{u}_1 \parallel \bar{u}_2$) som spänns upp av $\bar{u}_1, \bar{u}_2$.

$\Leftarrow$) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ ligger i ett plan. Två fall:

1) $\bar{u}_1 \parallel \bar{u}_2$ $\Rightarrow$ $\bar{u}_2 = x_1 \bar{u}_1 + 0 \cdot \bar{u}_3$ $\Rightarrow$ $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt beroende.

2) $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ är en bas i planet $\Rightarrow$ $\bar{u}_3 = x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2$ $\Rightarrow$ — // ——.

Bevis av (iii)a (planet)

Enligt (ii') är tre vektorer i planet linjärt beroende.
Fler än tre vektorer är också linjärt beroende (t.ex
$\bar{u}_3 = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + 0\cdot\bar{u}_4 + \ldots + 0\cdot\bar{u}_p$).

Bevis av (iii)b (rummet)

Låt $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$ vara vektorer i rummet. Ger två fall:

1) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ i ett plan $\overset{(ii')}{\Rightarrow}$ $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ ~~kan~~ är linjärt beroende
$\Rightarrow$ $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$ — // ——— .

2) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ ej i samma plan $\Rightarrow$ $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ bas för rummet
$\Rightarrow$ $\bar{u}_4 = x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3$
$\Rightarrow$ $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4$ är linjärt beroende.

Fler än fyra vektorer är återigen linjärt beroende (se bevis av (iii)a). $\square$

Fråga Hur testar vi om $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p$ är linjärt beroende/oberoende?

Sats 5 (sidan 36 i boken)

(i) $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow$
Ekvationen $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots + \lambda_p\bar{u}_p = \bar{0}$ har lösning
$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ med något $\lambda_i \neq 0$.

(ii) $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p$ är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$
Ekvationen $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \ldots + \lambda_p\bar{u}_p = \bar{0}$ har bara lösningen
$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.

Bevis av sats 5 (i)

$\Rightarrow$) $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p$ är linjärt beroende $\Rightarrow$ (tex) $\bar{u}_p = \lambda_1 \bar{u}_1 + \dots \lambda_{p-1}\bar{u}_{p-1}$

$\Rightarrow \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_{p-1}\bar{u}_{p-1} + \lambda_p \bar{u}_p = \bar{0}$ med $\lambda_p = -1 \neq 0$.

$\Leftarrow$) Antag att $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \dots + \lambda_p\bar{u}_p = \bar{0}$ med något $\lambda_i \neq 0$, tex $\lambda_p \neq 0$

$\Rightarrow \bar{u}_p = -\frac{\lambda_1}{\lambda_p}\bar{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_p}\bar{u}_2 - \dots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}\bar{u}_{p-1}$

$\Rightarrow \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_p$ är linjärt beroende.

Bevis (ii) Påstående (i) och (ii) är ekvivalenta. $\square$

Ex 4 Är vektorerna $\bar{u}_1 = (1,1,2)$, $\bar{u}_2 = (1,-1,1)$ och $\bar{u}_3 = (7,1,11)$ en bas för rummet?

Lösning $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är en bas för rummet $\Leftrightarrow$ $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt oberoende.

Vi kollar: $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \lambda_3\bar{u}_3 = \bar{0} \Leftrightarrow$

$$\lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(1,-1,1) + \lambda_3(7,1,11) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3,\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3,\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 11\lambda_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 11\lambda_3 = 0 \end{cases} \ (-1)\ (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \ \left(-\tfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4t \\ \lambda_2 = -3t \\ \lambda_3 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(mera lösning av Ex 4)

Dvs systemet har oändligt många lösningar $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t(-4,-3,1)$ och väljer vi något $t \neq 0$, t.ex $t = 1$, får vi

$-4\bar{u}_1 - 3\bar{u}_2 + \bar{u}_3 = \bar{0}$ $\Rightarrow$ $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt beroende.

~~ej bas~~ $\Rightarrow$ ej bas för rummet!

<u>Svar</u> $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ utgör inte en bas för rummet.

<u>Kommentar</u>

Om $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt beroende ~~har~~ så har ekvationen

$$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \lambda_3\bar{u}_3 = \bar{0}$$

alltid oändligt många lösningar $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ eftersom

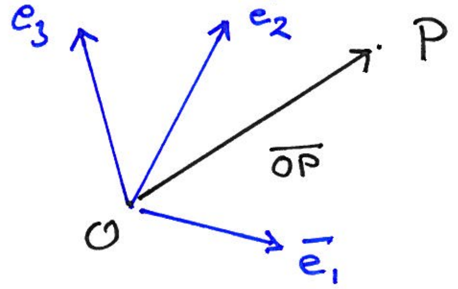
$$t\lambda_1\bar{u}_1 + t\lambda_2\bar{u}_2 + t\lambda_3\bar{u}_3 = t\cdot\bar{0} = \bar{0}$$

för varje $t \in \mathbb{R}$.

"2") koordinatsystem

För att kunna beskriva läget hos en punkt P i rummet behövs

1) En bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$
2) En fixerad punkt O (origo)



Vi kan nu entydigt bestämma läget hos P med hjälp utav vektorn $\overline{OP}$. Då $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ är en bas kan vi skriva

$$\overline{OP} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 = (x_1, x_2, x_3),$$

jfr med sats 3 (F2, sidan 8).

Def. * $\overline{OP}$ kallas för ortsvektorn till punkten P

* x_1, x_2, x_3 är koordinaterna för P i koordinatsystemet $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$.
* Vi skriver $P \overset{\cdot}{=} (x_1, x_2, x_3)$ ← jfr $\overline{OP} \overset{\underline{\cdot}}{=} (x_1, x_2, x_3)$.

Kommentarer

* Motsvarande gäller för punkter i planet (och på linjen...).
* Ofta använder man (x, y, z) istället för (x_1, x_2, x_3), och ritar tex "x-axeln" i stället för basvektorn $\bar{e}_1$.
* Observera att vi inte antar att vinklarna mellan basvektorerna är räta!

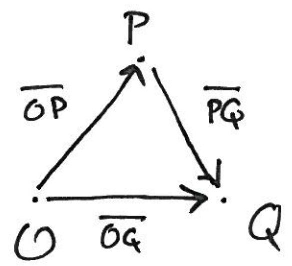
Ex 5 Ofta behövs vektorer "mellan" två punkter.

Om $P:(3,2,-1)$ och $Q=(0,4,-7)$ ges vektorn $\overline{PQ}$ av

$$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} = (0,4,-7)-(3,2,-1)$$

jfr Ex 3 (F2, sidan 3)

$$= (0-3, 4-2, -7-(-1)) = (-3,2,6).$$



(dvs "slutpunkt − startpunkt").

Ex 6 Vilken punkt M ligger mellan $P:(1,2,3)$ och $Q:(-3,4,5)$?
(i något givet koordinatsystem)

Lösning. Enligt mittpunktsformeln (F2, sidan 3) gäller

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OP}+\overline{OQ}) = \frac{1}{2}\left((1,2,3)+(-3,4,5)\right) = \frac{1}{2}(-2,6,8)$$

$= (-1,3,4)$, vilket är ortsvektorn till punkten $M:(-1,3,4)$.

Svar $M:(-1,3,4)$.

Koordinatplanen

* Planet som går genom x− och y-axeln kallas för xy-planet och kan skrivas som

$$\{\text{alla punkter } P:(x,y,z) \text{ där } z=0\}.$$

mängd symbolen...

* $z=0$ kallas ekvationen för xy-planet.

* xy-, xz- och yz-planen kallas för koordinatplanen.