F14 | Egenvärden och egenvektorer

<u>Def</u> Antag att A är en $n \times n$-matris.

Om $\underline{X} \neq 0$ och λ är en skalär som uppfyller sambandet

$$\boxed{A\underline{X} = \lambda \underline{X}}$$

Så kallar vi λ för <u>egenvärde</u> och $\underline{X}$ <u>egenvektor</u> till A.

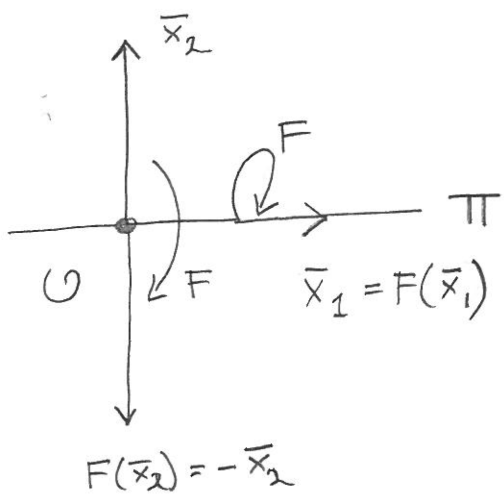
<u>Kommentar</u>

1) $\underline{X}$ och λ kan vara komplexa (alla räknelagar fungerar ändå som vanligt).

2) Vi gör motsvarande def. för linjära avbildningar, dvs $F(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$.

3) Enkelt att beräkna $A\underline{X}$ om $\underline{X}$ är en egenvektor till A.

<u>Ex</u> Låt A vara avb. matrisen för F som beskriver spegling i planet $\Pi: x - y + z = 0$.



1) Alla $\bar{x}_1 \parallel \Pi$ avbildas på sig själv, eller på matris form

$$A\underline{X}_1 = 1 \cdot \underline{X}_1$$

$\Rightarrow$ $\underline{\lambda = 1}$ är ett egenvärde till A

och alla $\underline{X}_1 \neq 0$ "i planet" är egenvektorer.

(mera Ex)

2) Alla $\bar{x}_2 \perp \Pi$ vänds upp och ner, eller

$$A\underline{X}_2 = -1 \cdot \underline{X}_2$$

$\Rightarrow$ $\underline{\lambda = -1}$ är ett annat egenvärde till A och

$\underline{X}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är motsvarande egenvektor(er). $(t \neq 0)$

3) Det finns <u>inga andra</u> vektorer $\bar{x}$ som avbildas på multiplar av sig själva $\Rightarrow$ finns <u>inga flera</u> egenvärden (eller egenvektorer).

<u>Fråga</u> Hur kan vi <u>beräkna</u> egenvärden/egenvektorer?

<u>Svar</u> $A\underline{X} = \lambda \underline{X}$ för något $\underline{X} \neq 0$ $\iff$

$\lambda \underline{X} - A\underline{X} = (\lambda I - A)\underline{X} = 0$ har lösning $\underline{X} \neq 0$ $\iff$

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0}.$$

<u>OBS</u> Om $\underline{X}$ är en egenvektor till A så är även $Z = t\underline{X}$ (med $t \neq 0$) en egenvektor, eftersom

$$AZ = A(t\underline{X}) = tA\underline{X} = t\lambda\underline{X} = \lambda Z.$$

Dvs vi får <u>aldrig en egenvektor</u> till ett egenvärde, utan <u>alltid</u> <u>oändligt många</u> <u>egenvektorer</u> till varje egenvärde.

Ex Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösning. Först beräknar vi egenvärdena:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \lambda-2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \dots = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda-3)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 0 \text{ eller } 3.}$$

Egenvektorer till $\lambda = 0$:

$$(0I - A)\underline{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{X} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \neq 0.$$

Egenvektorer till $\lambda = 3$:

$$(3I - A)\underline{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \cancel{-x_1 + x_2 - x_3 = 0} \\ \cancel{x_1 - x_2 + x_3 = 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ alt 1 alla $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq 0$ med $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

alt 2 $\underline{X} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, med $s, t \in \mathbb{R}$ valda så att $\underline{X} \neq 0$.

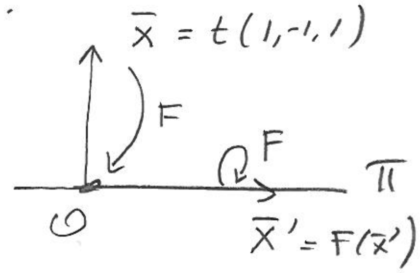
<u>Kommentar</u> Ort. proj. på $x-y+z=0$ har avb. matrisen

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A \leftarrow \text{(matrisen i exemplet ovan)}.$$

A:s egenvärden $\lambda_A = 0, 3 \Rightarrow B$:s egenvärden $\lambda_B = 0, 1$.

och B har samma egenvektorer som A.

<u>Det senare ses direkt ur figuren</u>



<u>Def.</u> Polynomet $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ kallas för det <u>karakteristiska polynomet</u> till A och $P_A(\lambda) = 0$ för den <u>karakteristiska ekvationen</u> till A.

$\times$ <u>Läs själva</u> Lemma 1 på s. 240 i boken.

<u>Diagonalisering</u>

Vi ska nu använda egenvärden/vektorer för att "faktorisera" (vissa) matriser.

<u>Ex</u> Bestäm egenvärden och egenvektorer till $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

<u>Lösning</u> $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 4 \\ 4 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = \pm 5}$.

$\underline{\lambda = 5}$: $(5I - A)\bar{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = t \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{\bar{X} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}, t \neq 0.$

(mera lösning) 5

$\underline{\lambda = -5}$ $\quad (-5I - A)\underline{X} = 0 \iff \begin{cases} -8x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{X} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \ t \neq 0.$$

Tolka nu matrisen A som avb. matrisen till en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Sätter vi

jfr med $\underline{X}$ ovan

$\begin{cases} \bar{e}_1' = (-2,1) \\ \bar{e}_2' = (1,2) \end{cases}$ får vi $\begin{cases} F(\bar{e}_1') = 5\bar{e}_1' \\ F(\bar{e}_2') = -5\bar{e}_2' \end{cases}$,

dvs avb. matrisen A' för F i den nya basen $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$ blir

$$A' = \begin{pmatrix} | & | \\ F(\bar{e}_1') & F(\bar{e}_2') \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = D \leftarrow \text{diagonalmatris}$$

(enkel struktur!)

Vidare har vi att $\bar{E}' = S^T E = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} E$ och enligt (F11, s.8) gäller

$$A' = \boxed{D = S^{-1}AS} \iff \underline{A = SDS^{-1}}$$

vilket är vår sökta "faktorisering" eller <u>diagonalisering</u>.

<u>Koll</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=S}\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_{=D}\underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=S^{-1}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}}_{=A}$$

Def. En kvadratisk matris ($n \times n$) A sägs vara <u>diagonaliserbar</u> om det finns en inverterbar matris S och en diagonal matris D så att

$$D = S^{-1} A S.$$

<u>Sats</u> A är diagonaliserbar $\Leftrightarrow$

A har n stycken linjärt oberoende egenvektorer.

<u>Hur hittar vi S och D till $n \times n$-matrisen A?</u>

1) Beräkna alla egenvärden λ_i till A (genom att lösa $p_A(\lambda) = 0$).

2) —//— egenvektorer $\underline{X}_i$ till A (genom $(\lambda_i I - A)\underline{X}_i = 0$)

Om vi kan välja ut n st. linjärt oberoende kolonnmatriser $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$ så är A diagonaliserbar $\Rightarrow$

3) $S = (\underline{X}_1 \dots \underline{X}_n)$ och $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

<u>Ex</u> Kan man diagonalisera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

<u>Lösning</u> 1) $P_\lambda(A) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 1}.$

2) $(I - A)\underline{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0x_1 - x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{X} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0.}$

<u>Svar</u> Nej, det går inte att diagonalisera A då det inte finns $n = 2$ lin. ob. egenvektorer till A!

<u>Fråga</u> Vilka matriser går att diagonalisera?

<u>Svar</u> * Alla $n \times n$-matriser med n <u>olika</u> egenvärden.

* Alla <u>symmetriska</u> matriser (dvs $A = A^T$)

* Ibland även andra (man får kolla om det finns n st. linjärt oberoende egenvektorer).

<u>Ex</u> Beräkna $A^{100} = \underbrace{AA\ldots A}_{100\text{ st}}$ om $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>Lösning</u> <u>alt 1</u> 99-matrismultiplikationer...

<u>alt 2</u> Diagonalisera $A = SDS^{-1}$ (om möjligt)

$$\Rightarrow A^{100} = SD\underbrace{S^{-1}S}_{=I}D\underbrace{S^{-1}\ldots S}_{=I}D\underbrace{S^{-1}S}_{=I}D\underbrace{S^{-1}S}_{=I}DS^{-1} = SD^{100}S^{-1}.$$

Här är $D^{100} = D^{98}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} \lambda_1^{100} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^{100} = S\begin{pmatrix} \lambda_1^{100} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100} \end{pmatrix}S^{-1}.$$

<u>Beräkna λ_i</u>: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 9 & -5 \\ -1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda-9)(\lambda-5) - 5$

$= \lambda^2 - 14\lambda + 40 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda} = 7 \pm \sqrt{7^2 - 40} = \underline{4 \text{ eller } 10}$

Två skilda egenvärden $\Rightarrow$ 2×2 matrisen A går att diagonalisera.

(mera lösning)

Egenvektorer

$\lambda_1 = 4$: $(4I - A)\overline{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 - 5x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{X} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \neq 0.$

$\lambda_2 = 10$: $(10I - A)\overline{X} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 5x_2 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5t \\ x_2 = t \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{X} = t\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \neq 0.$

Vi kan tex välja $\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad S = (\overline{X}_1, \overline{X}_2) = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$

Kolla alltid : $SDS^{-1} = A$!

Slutligen får vi att

$$A^{100} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} 4^{100} & 0 \\ 0 & 10^{100} \end{pmatrix}}_{D^{100}} \underbrace{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{S^{-1}}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4^{100} & 5 \cdot 10^{100} \\ 4^{100} & 10^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4^{100} + 5 \cdot 10^{100} & -5 \cdot 4^{100} + 5 \cdot 10^{100} \\ -4^{100} + 10^{100} & 5 \cdot 4^{100} + 10^{100} \end{pmatrix}.$$