

- **Tillåtna hjälpmedel:** Miniräknare samt utdelad formelsamling (häftad med tentamen).
- Tentamen består av 10 uppgifter om 0.6 poäng vardera, med delpoäng om minst 0.1 poäng.
- Betygsgränser: Betyg 3 (godkänt): 3.0 poäng. Betyg 4: 4.0 poäng. Betyg 5: 5.0 poäng.
- **Tips:** Läs genom hela tentamen och börja med den uppgift du anser vara lättast.
- För övriga instruktioner, se tentamensomslagets insida.

-
1. Låt A och B vara två godtyckliga händelser i ett utfallsrum Ω . Uttryck med mängdbeteckning (t.ex. $A \cap B$) samt rita figur (Venndiagram) och skugga händelsen att
 - (a) Minst en av händelserna A och B inträffar. (0.2)
 - (b) Exakt en av händelserna A och B inträffar. (0.2)
 - (c) A inträffar givet att B redan har inträffat.
Ledning: Vad händer med utfallsrummet Ω då händelsen B är given? (0.2)
 2. I en klass med 30 studenter spelar 18 studenter fotboll, 12 studenter basket och 5 studenter *både* fotboll och basket.
 - (a) Hur många studenter spelar minst en av sporterna? (0.3)
 - (b) Hur många studenter spelar varken fotboll eller basket? (0.3)
 3. I en affär handlar varje tisdag 400 kunder. Låt den η vara slumpvariabeln som beskriver antal liter mjölk en kund köper. En undersökning visar att ingen köper mer än tre liter mjölk i denna affär och att $P(\eta = 0) = 0.2$, $P(\eta = 1) = 0.4$, $P(\eta = 2) = 0.3$ och $P(\eta = 3) = 0.1$. Antag att kunders mjölkinköp är oberoende av varandra och att affären endast har enlitersförpackningar.
 - (a) Beräkna väntevärde och standardavvikelse för η . (0.2)
 - (b) Låt ν vara slumpvariabeln som beskriver alla kunders samlade mjölkinköp på tisdagar. Bestäm väntevärde och standardavvikelse för ν . (0.2)
 - (c) Bestäm approximativt med Centrala gränsvärdessatsen sannolikheten att 550 liter mjölk räcker till alla kunder. (0.2)
 4. Låt R vara en relation definierad som xRy om och endast om x/y är ett primtal. Är detta en ekvivalensrelation? Är detta en partialordning? (partial order). Motivera ditt svar. (0.6)
 5. Den stokastiska variabeln ξ har fördelningsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Bestäm $f(x)$ och visa att denna är en täthetsfunktion. (0.6)

Var god vänd!

6. (a) En funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ är definierad som $(\ln x)^{1/3}$. Skriv upp definitionsmängden och beskriv funktionen; är den *injektiv*? *surjektiv*? *bijektiv*? (0.3)
- (b) Korrigerar värde- och funktionsmängderna för funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ där $f(x) = x^4$ så att den blir bijektiv. (0.3)
7. Livslängden (i timmar) för en viss typ av LED-lampa anses exponentialfördelad med ett genomsnitt på $\lambda^{-1} = 40000$ timmar. Vi har då att $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$. I en lärosal sitter $n = 40$ identiska lampor och deras livslängder kan antas vara oberoende av varandra. Beräkna hur lång tid alla lamporna förväntas lysa i lärosalen innan den första slocknar.
Ledning: Beräkna först fördelningen för livslängdernas *minsta värde*. (0.6)
8. (a) Hur många unika bokstavsföljder med 10 bokstäver kan du skriva med bokstäverna från INDIGENOUS (sv: *inhemsk*) om du drar bokstäver med återläggning? (0.3)
- (b) En grupp studenter är tillräckligt stor om det är möjligt att ur denna bilda minst 15 olika delmängder med 3 studenter i varje. Vilket är det minsta antal studenter som krävs för detta? *Ledning:* Delmängderna $\{1, 2, 3\}$ och $\{1, 2, 4\}$ anses vara olika. (0.3)
9. En tentamen med flervalsfrågor består av 10 frågor med 5 svarsalternativ på varje fråga. Vilken gräns för godkänt ska man sätta för att sannolikheten att man blir godkänd genom att enbart gissa skall vara högst $1/1000$? *Ledning:* Vad är fördelningen för antal rätta svar genom gissning? (0.6)
10. Visa med matematisk induktion att

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(0.6)

Lycka till!