Matematik LTH
Helsingborg

Tentamensskrivning, FMSF40
Sannolikhetsteori och diskret matematik
2024-04-03 kl 8.00–13.00

- Hjälpmedel: Miniräknare och utdelad formelsamling.
- Lösningar ska vara försedda med **ordentliga motiveringar** och svaren förenklas maximalt.
- Skriv anonymkod (eller namn om du saknar kod) på varje papper.
- På omslaget måste du skriva med bläck.
- Skriv endast på ena sidan av pappret. Flera lösningar på samma blad är dock ok.

---

1. En hög hatt innehåller 6 blå och 9 gula kaniner. Man drar 5 kaniner utan återläggning. Betrakta händelserna: (A) Man får minst 2 blå kaniner och (B) Man får minst 2 gula kaniner.

a) Beräkna sannolikheterna $P(A)$ och $P(B)$. (0.4)

b) Är händelserna A och B oberoende? (0.2)

2. Man har 9 olika kulor och 4 likadana lådor.

a) På hur många sätt kan kulorna fördelas i lådorna så att ingen blir tom? (0.2)

b) På hur många sätt kan kulorna fördelas om vi tillåter högst två tomma lådor? (0.4)

3. Den kontinuerliga stokastiska variabeln ξ har fördelningsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ k(3x + 2 - x^3), & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

a) Ange värdet på k. (0.2)

b) Bestäm väntevärdet och variansen för ξ. (0.4)

4. Visa att

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

för alla heltal $n \geq 1$. (0.6)

VAR GOD VÄND!

5. Vid en viss högskola finns tre ingenjörsutbildningar: A, B och C. De har 30, 60 respektive 60 studenter. En student på A-programmet klarar en matematiktentamen vid första tentamenstillfället med en sannolikhet på 0.6. För studenter på B- respektive C-programmen är sannolikheten 0.5 respektive 0.4.

a) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald student klarar matematiktentamen vid första tentamenstillfället? (0.3)

b) En gästande matematiklärare träffar en student som stolt berättar at hen klarat matematiktentamen vid första tentamenstillfället. Vad är sannolikheten att hen studerar på A-programmet? (0.3)

6. Talföljden a_n definieras genom $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ och $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ om $n \geq 2$.

a) Ange en explicit formel för a_n. (0.3)

b) Bevisa att a_n är jämn om n är jämn. (0.3)

7. För att bestämma effekten $P = R \cdot I^2$ mäter man strömstyrkan I och resistansen R. På grund av mätfel är I och R stokastiska variabler som antas ha väntevärden 1.5 respektive 23.5 och standardavvikelserna 0.09 respektive 1.2. Beräkna approximativa väntevärdet och variansen för P. (0.6)

8. Låt $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$ och betrakta relationen $\mathcal{R}$ på A definierad genom $x\mathcal{R}y$ om $x \mid y$.

a) Avgöra om $\mathcal{R}$ är reflexiv? symmetrisk? transitiv? (0.4)

Relationen $\mathcal{R}$ kallas *stärkt sammanhängande* om det för alla $x, y \in A$ gäller att $x\mathcal{R}y$ eller $y\mathcal{R}x$.

b) Är $\mathcal{R}$ stärkt sammanhängande? (0.2)

9. En kund köper 48 olika varor. För att få en uppskattning av totala prisen avrundar kunden varje varas pris till hela kronor och beloppen summeras. De olika avrundningsfel antas rektangelfördelade och oberoende. Vad är approximativa sannolikheten att korrekta totala prisen och uppskattningen skiljer sig från varandra med mer än 5 kronor? (0.6)

10. Antag att $x_1, x_2, \ldots, x_7$ är 7 hela tal. Bevisa att det finns i och j, $i \neq j$, så att något av talen $x_i + x_j$ och $x_i - x_j$ är delbart med 10. (0.6)

SLUT!