Matematik LTH
Helsingborg

Tentamensskrivning, FMSF40
Sannolikhetsteori och diskret matematik
2023-10-27 kl 8.00–13.00

- Hjälpmedel: Miniräknare och utdelad formelsamling.
- Lösningar ska vara försedda med **ordentliga motiveringar** och svaren förenklas maximalt.
- Skriv anonymkod (eller namn om du saknar kod) på varje papper.
- På omslaget måste du skriva med bläck.
- Skriv endast på ena sidan av pappret. Flera lösningar på samma blad är dock ok.

---

1. En stokastisk variabel ξ har frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot e^{3x} & \text{för } x \leq 0, \\ \frac{1}{3} \cdot e^{-x} & \text{för } x > 0 \end{cases}$$

för någon konstant k.

a) Ange värdet på k. (0.2)

b) Bestäm fördelningsfunktionen för ξ. (0.2)

c) Beräkna a så att $P(\xi \leq a) = \frac{3}{4}$. (0.2)

2. Låt p, q och r vara satser så att påståendet $\Big((p \wedge \neg q) \wedge \big(p \to (q \to r)\big)\Big) \to \neg r$ är falskt. Beräkna $(r \to p) \wedge \neg q$. (0.6)

3. Kvaliteten hos vissa tillverkade enheter beror av två oberoende normalfördelade stokastiska variabler ξ och η, av vilka $\xi \in N(110, 5)$ och $\eta \in N(200, 25)$. En enhet sägs ha felet A om $\xi > 120$ och felet B om $\eta < 175$. Beräkna sannolikheten att en tillverkad enhet har minst ett av felen. (0.6)

4. Betrakta relationen

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,5), (2,1), (2,2), (2,4), (4,4), (5,1), (5,2), (5,5)\}$$

på mängden $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Är $\mathcal{R}$ reflexiv? symmetrisk? antisymmetrisk? transitiv? (0.6)

VAR GOD VÄND!

5. Från en urna med 4 blå, 5 röda och 7 gröna kulor tar man på måfå 3 kulor utan återläggning.

a) Ange sannolikheten för att man får exakt 2 blå kulor. (0.3)

b) Ange sannolikheten för att man får minnst 1 röd kula. (0.3)

6. **a)** Bevisa att $\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 < 2$ för $n \geq 4$. (0.2)

b) Bevisa mha **a)** att $n^3 < 2^n$ för $n \geq 10$. (0.4)

7. Arean av ett kvadratisk bord är en stokastisk variabel med väntevärdet $12\,100$ cm^2 och standardavvikelsen 33 cm^2. Låt ξ beteckna bordets sidolängd. Ange approximative värden för väntevärdet och standardavvikelsen av ξ. (0.6)

8. Sätt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

a) Hur många funktioner $f\colon A \to B$ finns det? Hur många är injektiva? Hur många är surjektiva? (0.3)

b) Hur många injektiva funktioner $g\colon B \to A$ finns det? Hur många surjektiva funktioner $g\colon B \to A$ finns det? Hur många bijektiva funktioner $g\colon B \to A$ finns det? (0.3)

9. Per och Pål har 11 frukter av vilka 3 är giftiga. Per äter 4 och Pål 6 på måfå valda frukter; hunden får den återstående. Beräkna sannolikheten att

a) hunden klarar sig. (0.2)

b) både Per och Pål blir förgiftade om hunden klarar sig. (0.2)

c) både Per och Pål blir förgiftade men hunden klarar sig. (0.2)

10. I en liksidig triangel med sidan 2 väljes 5 punkter. Bevisa att det finns två punkter vars avstånd är högst 1. (0.6)

SLUT!