Matematik LTH
Helsingborg

Tentamensskrivning, FMSF40
Sannolikhetsteori och diskret matematik
2022-08-26 kl 8.00–13.00

- Hjälpmedel: Miniräknare och utdelad formelsamling.
- Lösningar ska vara försedda med **ordentliga motiveringar** och svaren förenklas maximalt.
- Skriv anonymkod (eller namn om du saknar kod) på varje papper.
- På omslaget måste du skriva med bläck.
- Skriv endast på ena sidan av pappret. Flera lösningar på samma blad är dock ok.

---

1. En stokastisk variabel ξ har frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2, & 0 \le x < a \\ 3x+3, & a \le x < 2a \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Bestäm möjliga värden på konstanten a och beräkna väntevärdet för ξ. (0.6)

2. Definiera relationen $\mathcal{R}$ på mängden av positiva heltalen $\mathbb{Z}_+$ genom $a\,\mathcal{R}\,b \iff a = b^k$ för något positivt heltal k. Är relationen $\mathcal{R}$ reflexiv? symmetrisk? antisymmetrisk? transitiv? (0.6)

3. I fyrmannavist delas en vanlig kortlek (52 kort, inga jokrar) ut så att alla spelare får 13 kort. En spelare berättar att han har fått ett ess. Vad är den betingade sannolikheten att han har fått ytterligare några ess? (0.6)

4. Betrakta de tre funktionerna $f, g, h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definierada av $f(x) = x^2+1$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ och $h(x) = 1$. Bestäm $f \circ g$ och $g \circ h$. Avgör om de sammansatta funktionerna är injektiva, surjektiva, bådadera eller ingetdera. (0.6)

5. Årsnederbörden ξ i mm på en viss ort antas vara normalfördelad $\xi \in N(300, 25)$. Bestäm sannolikheten att under 10 år årsnederbörden åtminstone ett år överstiger 350. (Obs: Årsnederbörderna olika år antas vara oberoende.) (0.6)

6. Betrakta fibonaccitalen f_n definerad vid $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ och $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ för $n \ge 2$. Bevisa att

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1} \quad \text{för alla } n \ge 1. \qquad (0.6)$$

VAR GOD VÄND!

7. En elektrisk komponent består av två delar. Komponenten fungerar så länge minst en av delarne fungerar. Livslängderna för de två delar är oberoende och exponentialfördelade med väntevärdet 2 timmar. Beräkna sannolikheten för att komponenten fungerar efter 3 timmar. (0.6)

8. Hur många "nordost" vägar i xy-planet finns det från $(0,0)$ till $(5,7)$? En "nordost" väg består av steg av längd 1 där varje steg går antigen åt höger eller rakt uppåt. (0.6)

9. Flygpassagerarna från en stor stad har en kroppsvikt (enhet: kg) som kan anses normalfördelad med väntevärdet 81 och standardavvikelsen 3.5. Hur stor är sannolikheten att 21 sådana passagerare tillsammans väger mer än 1740 kg? (Obs: passagerarnas vikter är oberoende av varandra.) (0.6)

10. Visa att det i en grupp på 20 studenter måsta finnas minst två studenter som har samma antal vänner inom gruppen. (Obs: Om A är vän med B, då är B också vän med A.) (0.6)

SLUT!