Lunds Tekniska Högskola
Matematik
Helsingborg

Lösningar, FMSF40
Sannolikhetsteori och Diskret Matematik
2024-04-03

1. a) Om ξ betecknar antallet blå kaniner gäller $\xi \in \text{Hyp}(15, 5, 6/15)$. Vi har då

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - \big(P(\xi = 0) + P(\xi = 1)\big) \\ &= 1 - \left(\frac{\binom{6}{0}\binom{9}{5}}{\binom{15}{5}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{9}{4}}{\binom{15}{5}}\right) = 1 - \left(\frac{1 \cdot 126}{3003} + \frac{6 \cdot 126}{3003}\right) \\ &= \frac{101}{143} = 0.\overline{706293} \end{aligned}$$

Antallet gula kaniner är $5 - \xi$ varför

$$\begin{aligned} P(B) &= P(5 - \xi \geq 2) = P(\xi \leq 3) = 1 - P(\xi \geq 4) = 1 - \big(P(\xi = 4) + P(\xi = 5)\big) \\ &= 1 - \left(\frac{\binom{6}{4}\binom{9}{1}}{\binom{15}{5}} + \frac{\binom{6}{5}\binom{9}{0}}{\binom{15}{5}}\right) = 1 - \left(\frac{15 \cdot 9}{3003} + \frac{6 \cdot 1}{3003}\right) = \frac{954}{1001} = 0.\overline{953046} \end{aligned}$$

b) Vi har

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(\xi \geq 2 \text{ och } 5 - \xi \geq 2) = P(2 \leq \xi \leq 3) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) \\ &= \frac{\binom{6}{2}\binom{9}{3}}{\binom{15}{5}} + \frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{15 \cdot 84}{3003} + \frac{20 \cdot 36}{3003} = \frac{60}{91} = 0.\overline{659340} \end{aligned}$$

Alternativt kan $P(A \cap B)$ beräknas på följande sätt: Man måste få minst 2 blå eller minst 2 gule kaniner då det är omöjligt att få båda högst 1 blå kanin och högst 1 gul kanin. Altså gäller $P(A \cup B) = 1$ vilket ger

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{101}{143} + \frac{954}{1001} - 1 = \frac{60}{91} = 0.\overline{659340}$$

Enligt **a)** gäller

$$P(A)P(B) = \frac{101}{143} \cdot \frac{954}{1001} = \frac{96\,354}{143\,143} \cong 0.67313106$$

Alltså är $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, dvs händelserna A och B är inte oberoende.

2. a) Antallet olika sätt ges av

$$S(9, 4) = 7770.$$

b) Antallet olika sätt med 0 tomma lådor ges enligt **a)** av $S(9, 4)$. Antallet sätt med 1 tom låda är samma som antallet sätt att placera 9 olika kulor i 3 likadanna lådor, dvs $S(9, 3)$. På samma sätt blir antallet sätt med 2 tomma lådor $S(9, 2)$. Det totala antallet sätt är alltså

$$S(9, 4) + S(9, 3) + S(9, 2) = 7770 + 3025 + 255 = 11\,050.$$

3. a) Då F är kontinuerlig i 1 gäller

$$1 = F(1) = \lim_{x\to 1^-} F(x) = k \cdot (3 \cdot 1 + 2 - 1^3) = 4k$$

vilket ger $k = {}^1\!/\!{}_4$.

b) Derivation ger

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Väntevärdet blir därför

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x \cdot \tfrac{3}{4}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \tfrac{3}{4}\int_{-1}^{1} x - x^3\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{3}{4}\left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \tfrac{3}{4}\Big(\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\right) - \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\right)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Väntevärdet för ξ^2 blir

$$\begin{aligned} E\left(\xi^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \tfrac{3}{4}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \tfrac{3}{4}\int_{-1}^{1} x^2 - x^4\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{3}{4}\left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \tfrac{3}{4}\Big(\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right) - \left(\tfrac{-1}{3}-\tfrac{-1}{5}\right)\Big) = \tfrac{1}{5}. \end{aligned}$$

Variansen för ξ är därför $V(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E(\xi)^2 = \frac{1}{5} - 0^2 = \frac{1}{5}$.

4. Vi visar att påståendet

$$P(n)\colon\ \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

gäller för alla $n \ge 1$ vha induktion. För $n = 1$ gäller

$$\mathrm{VL}_1 = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} = \frac{3}{4} \quad \text{och} \quad \mathrm{HL}_1 = 1 - \frac{1}{(1+1)^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Alltså gäller påståendet $P(1)$.

Anta nu att $P(p)$ är sannt där $p \geq 1$. Vi har då

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{p+1} &= \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots + \frac{2(p+1)+1}{(p+1)^2 \cdot ((p+1)+1)^2} \\
&= \left(\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \ldots + \frac{2p+1}{p^2 \cdot (p+1)^2} \right) + \frac{2p+3}{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2} \\
&= \mathrm{VL}_p + \frac{2p+3}{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2} \\
&= \mathrm{HL}_p + \frac{2p+3}{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2} \\
&= 1 - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{2p+3}{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2} \\
&= 1 - \frac{(p+2)^2}{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2} + \frac{2p+3}{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2} \\
&= 1 - \frac{(p+2)^2 - (2p+3)}{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2} \\
&= 1 - \frac{p^2 + 4p + 4 - 2p - 3}{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2} \\
&= 1 - \frac{p^2 + 2p + 1}{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2} \\
&= 1 - \frac{(p+1)^2}{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2} \\
&= 1 - \frac{1}{(p+2)^2} \\
&= 1 - \frac{1}{((p+1)+1)^2} \\
&= \mathrm{HL}_{p+1}.
\end{aligned}$$

5. a) Låt G vara händelsen att en student klarar matematiktentamen vid första tentamenstillfället. Totalt finns $30 + 60 + 60 = 150$ studenter vilket get $P(A) = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$ och $P(B) = P(C) = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$. Alltså gäller

$$\begin{aligned}
P(G) &= P(G \cap A) + P(G \cap B) + P(G \cap C) \\
&= P(A)P(G \mid A) + P(B)P(G \mid B) + P(C)P(G \mid C) \\
&= \tfrac{1}{5} \cdot 0.6 + \tfrac{2}{5} \cdot 0.5 + \tfrac{2}{5} \cdot 0.4 = \tfrac{12}{25} = 0.48
\end{aligned}$$

b) Sökte sannolikheten blir

$$P(A \mid G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(A)P(G \mid A)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0.6}{\frac{12}{25}} = \tfrac{1}{4} = 0.25$$

6. **a)** Rekursionsekvationen är linjär och homogen av ordning 2. Karakteristiska ekvationen blir $x^2 = -6x - 9$ som har dubbelroten $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Lösningen blir alltså $a_n = (C_1 n + C_2) \cdot (-3)^n$ för $n \geq 0$. Då $a_0 = 2$ och $a_1 = 1$ gäller

$$(C_1 \cdot 0 + C_2) \cdot (-3)^0 = 2 \Longleftrightarrow C_2 = 2,$$

och

$$(C_1 \cdot 1 + C_2) \cdot (-3)^1 = 1 \Longleftrightarrow (C_1 + 2) \cdot (-3) = 1 \Longleftrightarrow C_1 = -\tfrac{1}{3} - 2 = -\tfrac{7}{3}.$$

Alltså gäller

$$a_n = \left(-\tfrac{7}{3} \cdot n + 2\right) \cdot (-3)^n = (7n - 6) \cdot (-3)^{n-1}.$$

b) Om $n = 0$ är $a_n = a_0 = 2$ jämn. Anta nu att $n \geq 1$ är jämn. Då är $7n - 6$ också jämn. Då $(-3)^{n-1}$ är ett heltal är även $a_n = (7n-6) \cdot (-3)^{n-1}$ jämn. Detta visar påståendet.

7. Låt $g(R, I) = R \cdot I^2$, $\mu_R = E(R) = 23.5$ och $\mu_I = E(I) = 1.5$. Enligt Gauss approximationsformlar gäller

$$E(P) = E(g(R, I)) \approx g(\mu_R, \mu_I) = \mu_R \cdot \mu_I^2 = 23.5 \cdot 1.5^2 = 52.875$$

och

$$\begin{aligned} V(P) = V(g(R, I)) &\approx \left(\tfrac{\partial g}{\partial R}(\mu_R, \mu_I)\right)^2 \cdot V(R) + \left(\tfrac{\partial g}{\partial I}(\mu_R, \mu_I)\right)^2 \cdot V(I) \\ &= \left(\mu_I^2\right)^2 \cdot \sigma_R^2 + (2\mu_R\mu_I)^2 \cdot \sigma_I^2 \\ &= \left(1.5^2\right)^2 \cdot 1.2^2 + (2 \cdot 23.5 \cdot 1.5)^2 \cdot 0.09^2 = 47.549025 \end{aligned}$$

där $\sigma_R = 1.2$ och $\sigma_I = 0.09$ är standardavvikelserna på R och I.

8. **a)** Relationen är reflexiv då $x \mid x$ för alla $x \in A$. Relationen är inte symmetrisk då $1 \mid 2$ men $2 \nmid 1$. Relationen är transitiv: Anta att $x \mid y$ och $y \mid z$. Då finns heltal a och b så att $y = ax$ och $z = by$. Herav erhålls

$$z = by = b(ax) = (ab)x.$$

Då ab är ett heltal gäller alltså $x \mid z$. Detta visar att relationen är transitiv.

b) Relationen är inte stärkt sammanhängande då $2 \nmid 3$ och $3 \nmid 2$.

9. Avrundningsfelet vid avrundning till hela kronor ligger i intervallet $[-0.5, 0.5]$. Då de individuella avrundningsfel ξ_i är rektangelfördelade gäller alltså $\xi_i \in R(-0.5, 0.5)$. Speciellt gäller $\mu = E(\xi_i) = \frac{-0.5+0.5}{2} = 0$ och $\sigma^2 = V(\xi_i) = \frac{1}{12}\left((0.5 - (-0.5)\right)^2 = \frac{1}{12}$. Skillnaden η mellan korrekta totale prisen och uppskattningen av denna ges av $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_{48}$. Enligt centrala gränsvärdessatsen gäller att η är approximativt normalfördelad $\eta \mathrel{\dot\in} N(n\mu, \sigma\sqrt{n}) = N\left(48 \cdot 0, \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{48}\right) = N(0, 2)$. Sannolikheten att skillnaden mellan korrekta totale prisen och uppskattningen är mer än 5 ges alltså av

$$\begin{aligned} P(|\eta| > 5) &= 1 - P(-5 \le \eta \le 5) \approx 1 - \left(\Phi\left(\frac{5-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-5-0}{2}\right)\right) \\ &= 1 - \Phi(5/2) + \Phi(-5/2) = 1 - \Phi(5/2) + \big(1 - \Phi(5/2)\big) \\ &= 2 - 2 \cdot \Phi(5/2) = 0.012419331 \end{aligned}$$

Man kan visa att den exakta sannolikheten är

$$\begin{aligned} P(|\eta| > 5) &= \frac{7\,521\,778\,256\,400\,876\,020\,035\,684\,202\,529\,348\,152\,098\,150\,582\,479\,462\,859\,273}{620\,695\,779\,626\,803\,633\,543\,114\,452\,368\,668\,751\,926\,074\,317\,733\,888\,000\,000\,000} \\ &\cong 0.01211830095 \end{aligned}$$

10. Uppdela heltallen efter sista siffran, dvs betrakta mängderna $[0]_{10}, [1]_{10}, \ldots, [9]_{10}$. Definiera nu följande 6 mängder

$$\begin{aligned} &X_1 = [0]_{10}, \quad X_2 = [1]_{10} \cup [9]_{10}, \quad X_3 = [2]_{10} \cup [8]_{10}, \quad X_4 = [3]_{10} \cup [7]_{10}, \\ &X_5 = [4]_{10} \cup [6]_{10} \quad \text{och} \quad X_6 = [5]_{10}. \end{aligned}$$

Då vi har 7 tal (breven) och 6 mängder (postfacken) måste det finnas $i \neq j$ så att x_i och x_j hamnar i samma mängd X.

Om $X = X_1$ gäller $x_i, x_j \equiv 0 \pmod{10}$, dvs båda x_i och x_j har sista siffran 0. Alltså har också $x_i - x_j$ sista siffran 0, dvs $x_i - x_j$ är delbart med 10. Om $X = X_6$ gäller $x_i, x_j \equiv 5 \pmod{10}$, dvs båda x_i och x_j har sista siffran 5. Alltså har också $x_i - x_j$ sista siffran 0, dvs $x_i - x_j$ är delbart med 10.

Om $X = X_2$ gäller $x_i, x_j \equiv 1, 9 \pmod{10}$, dvs båda x_i och x_j har sista siffran 1 eller 9. Om x_i och x_j har samma sista siffran är $x_i - x_j$ delbart med 10. Om x_i och x_j har olika sista siffran har den ena sista siffran 1 och den andra sista siffran 9. I detta fallet har $x_i + x_j$ sista siffran 0 och $x_i + x_j$ är delbart med 10. Om $X = X_3$, X_4 eller X_5 fungerar motsvarende argument som för X_2.