Lunds Tekniska Högskola
Matematik
Helsingborg

Lösningar, FMSF40
Sannolikhetsteori och Diskret Matematik
2023-10-27

1. a) Vi har

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} k\cdot e^{3x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \tfrac{1}{3}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[k\cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{-1}\cdot e^{-x}\right]_{0}^{\infty}$$
$$= k\cdot\tfrac{1}{3} - 0 + 0 - \left(-\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{k}{3} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{k+1}{3}.$$

Vi har alltså $1 = \frac{k+1}{3}$ vilket ger $k = 2$.

b) Om $x \le 0$ gäller

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 2e^{3t}\,\mathrm{d}t = \left[2\cdot\tfrac{1}{3}e^{3t}\right]_{-\infty}^{x} = \tfrac{2}{3}e^{3x} - 0 = \tfrac{2}{3}e^{3x}.$$

Om $x > 0$ gäller

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \tfrac{1}{3}e^{-t}\,\mathrm{d}t = F(0) + \left[\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{-1}\cdot e^{-t}\right]_{0}^{x}$$
$$= \tfrac{2}{3} + \left(-\tfrac{1}{3}e^{-x}\right) - \left(-\tfrac{1}{3}\right) = 1 - \tfrac{1}{3}e^{-x}.$$

Fördelningsfunktionen är alltså

$$F(x) = \begin{cases} \tfrac{2}{3}e^{3x} & \text{för } x \le 0, \\ 1 - \tfrac{1}{3}e^{-x} & \text{för } x > 0. \end{cases}$$

c) Vi har $P(\xi \le a) = F(a)$. Då $F(0) = \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ gäller $a > 0$. Vi får då

$$P(\xi \le a) = \tfrac{3}{4} \iff 1 - \tfrac{1}{3}\cdot e^{-a} = \tfrac{3}{4} \iff \tfrac{1}{3}\cdot e^{-a} = \tfrac{1}{4} \iff e^{-a} = \tfrac{3}{4}$$
$$\iff -a = \ln\left(\tfrac{3}{4}\right) \iff a = -\ln\left(\tfrac{3}{4}\right) = \ln\left(\tfrac{4}{3}\right) = 0.28768207$$

2. Sanningstabellen för påståendet $\Big((p \wedge \neg q) \wedge \big(p \to (q \to r)\big)\Big) \to \neg r$ är

p	q	r	$\neg q$	$\overbrace{p \wedge \neg q}^{x}$	$q \to r$	$\overbrace{p \to (q \to r)}^{y}$	$x \wedge y$	$\neg r$	$(x \wedge y) \to \neg r$
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1

Alltså är p och r sanna och q falskt. Vi beräknar nu sanningstabellen för $(r \to p) \wedge \neg q$ i detta fall.

p	q	r	$r \to p$	$\neg q$	$(r \to p) \wedge \neg q$
1	0	1	1	1	1

Påståendet $(r \to p) \wedge \neg q$ är alltså sant.

Alternativ: Då påståendet $\Big((p \wedge \neg q) \wedge \big(p \to (q \to r)\big)\Big) \to \neg r$ är falskt måste $(p \wedge \neg q) \wedge \big(p \to (q \to r)\big)$ vara sannt och $\neg r$ vara falskt enligt sanningstabellen för implikation ($\to$). Enligt sanningstabellen för konjunktion ($\wedge$) måste båda $p \wedge \neg q$ och $p \to (q \to r)$ vara sanna och då $\neg r$ är falskt måste r vara sann. Då $p \wedge \neg q$ är sann måste p vara sann och q vara falskt. Vi har alltså $p = 1$, $q = 0$ och $r = 1$. Observera att

$$p \to (q \to r) = 1 \to (0 \to 1) = 1 \to 1 = 1$$

och påståendet $\Big((p \wedge \neg q) \wedge \big(p \to (q \to r)\big)\Big) \to \neg r$ är därför falskt som önskad. Vi kan nu beräkna sanningsvärdet av $(r \to p) \wedge \neg q$:

$$(r \to p) \wedge \neg q = (1 \to 1) \wedge \neg 0 = 1 \wedge 1 = 1.$$

3. Sannolikheten för felet A är

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\xi > 120) = 1 - P(\xi \leq 120) = 1 - \Phi\left(\frac{120 - 110}{5}\right) \\ &= 1 - \Phi(2) = 0.022750132 \end{aligned}$$

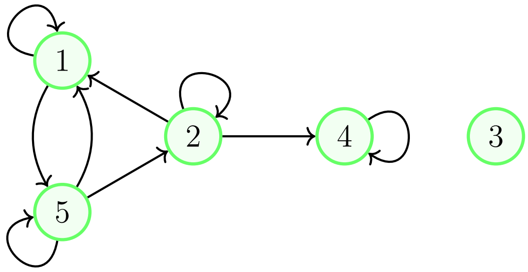
Sannolikheten för felet B är

$$P(B) = P(\eta < 175) = \Phi\left(\frac{175 - 200}{25}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.15865525$$

Då ξ och η är oberoende är händelserna A och B också oberoende. Alltså gäller

$$\begin{aligned} P(\text{minnst ett fel}) &= P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= \big(1 - \Phi(2)\big) + \big(1 - \Phi(1)\big) - \big(1 - \Phi(2)\big)\big(1 - \Phi(1)\big) \\ &= 1 - \Phi(2)\Phi(1) = 0.17779596 \end{aligned}$$

4. Relationsgrafen blir



Relationen är inte reflexiv då $3 \not\mathcal{R}\, 3$. Relationen är inte symmetrisk då $2\,\mathcal{R}\,1$ men $1 \not\mathcal{R}\, 2$. Relationen är inte heller antisymmetrisk då $1\,\mathcal{R}\,5$ och $5\,\mathcal{R}\,1$. Slutligen är relationen inte heller transitiv då $1\mathcal{R}5$ och $5\mathcal{R}2$ men $1\not\mathcal{R}2$.

5. a) Låt ξ vara antallet blå kulor. Om man slår ihop de 5 röda och de 7 gröna kulor till 12 icke-blå kulor ser man att ξ är hypergeometrisk fördelad, $\xi \in \mathrm{Hyp}(16, 3, \frac{4}{16})$. Därför gäller

$$P(\xi = 2) = \frac{\binom{16\cdot\frac{4}{16}}{2}\binom{16\left(1-\frac{4}{16}\right)}{3-2}}{\binom{16}{3}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{12}{1}}{\binom{16}{3}} = \frac{6\cdot 12}{560} = \frac{9}{70} = 0.12857143$$

b) Om η betecknar antallet röda kulor gäller $\eta \in \mathrm{Hyp}(16, 3, \frac{5}{16})$. Den sökta sannolikhet är därför

$$\begin{aligned} P(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta = 0) &= 1 - \frac{\binom{16\cdot\frac{5}{16}}{0}\binom{16\left(1-\frac{5}{16}\right)}{3-0}}{\binom{16}{3}} \\ &= 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{11}{3}}{\binom{16}{3}} = 1 - \frac{1\cdot 165}{560} = \frac{79}{112} = 0.70535714 \end{aligned}$$

6. a) Då $n \geq 4$ gäller $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$ varav

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \leq \left(1 + \tfrac{1}{4}\right)^3 = \left(\tfrac{5}{4}\right)^3 = \tfrac{125}{64} < \tfrac{128}{64} = 2.$$

b) Vi viser nu vid induktion att påståendet $P(n)\colon n^3 < 2^n$ gäller för alla $n \geq 10$. Då $10^3 = 1000$ och $2^{10} = 1024$ gäller påståendet $P(10)$. Anta nu att $P(p)$ är sannt, där $p \geq 10$. Vi har då

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{p+1} &= (p+1)^3 \\
&= \frac{(p+1)^3}{p^3} \cdot p^3 && \text{då vi vill ha faktorn } p^3 \text{ för att använda } P(p) \\
&< \frac{(p+1)^3}{p^3} \cdot 2^p && \text{pga } P(p) \\
&= \left(\frac{p+1}{p}\right)^3 \cdot 2^p \\
&= \left(1+\frac{1}{p}\right)^3 \cdot 2^p \\
&< 2 \cdot 2^p && \text{pga } \textbf{a)} \text{ då } p \geq 10 \geq 4 \\
&= 2^{p+1} \\
&= \mathrm{HL}_{p+1}.
\end{aligned}$$

7. Om η betecknar bordets area gäller $\mu = E(\eta) = 12\,100$ och $\sigma = \sqrt{V(\eta)} = 33$ (enhet cm^2). Observera att $\xi = \sqrt{\eta}$. Med $g(x) = \sqrt{x}$ gäller $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Gauss approximationsformler ger nu

$$E(\xi) \approx g(\mu) = \sqrt{12\,100} = 110 \text{ cm}$$

och

$$V(\xi) \approx \big(g'(\mu)\big)^2 \sigma^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\right)^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{4\mu} = \frac{33^2}{4 \cdot 12\,100} = \frac{9}{400}$$

Standardavvikelsen blir alltså $\sqrt{V(\xi)} \approx \sqrt{\frac{9}{400}} = \frac{3}{20} = 0.15$ cm.

8. **a)** Antallet funktioner från A till B är $|B|^{|A|} = 7^4 = 2401$. Av dessa är ${}_7P_4 = \frac{7!}{(7-4)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ injektiva. Då $|A| < |B|$ finns ingen surjektiva avbildningar från A till B.

b) Då $|B| > |A|$ finns ingen injektiva funktioner från B till A. Antallet surjektiva funktioner från B till A ges av $S(7,4) \cdot 4! = 350 \cdot 24 = 8400$. Då $|B| \neq |A|$ finns ingen bijektiva funktioner från B till A.

9. **a)** Sannolikheten för att en given frukt är giftig är $\frac{3}{11}$. Sannolikheten för att hunden klarar sig är därför

$$1 - \tfrac{3}{11} = \tfrac{8}{11} = 0.72727273$$

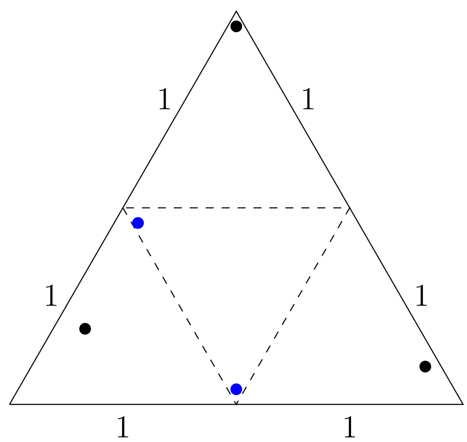
b) Om hunden klarar sig finns det 10 frukter till Per och Pål varav 3 är giftiga. Låt ξ vara antallet giftiga frukter som Per äter. Då gäller $\xi \in \mathrm{Hyp}(10, 4, \frac{3}{10})$. Båda Per och Pål blir forgiftade om både äter 1 eller flera förgiftade frukter, dvs om Per äter 1 eller 2 förgiftade frukter. Sannolikheten att både blir förgiftade är alltså

$$P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = \frac{\binom{10\cdot\frac{3}{10}}{1}\binom{10\left(1-\frac{3}{10}\right)}{4-1}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{10\cdot\frac{3}{10}}{2}\binom{10\left(1-\frac{3}{10}\right)}{4-2}}{\binom{10}{4}} = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}}$$
$$= \frac{3\cdot 35}{210} + \frac{3\cdot 21}{210} = \frac{3\cdot 56}{210} = \frac{4}{5} = 0.8$$

c) Låt A vara händelsen "både Per och Pål blir förgiftade" och B vara händelsen "hunden klarar sig". Enligt **a)** gäller $P(B) = \frac{8}{11}$ och enligt **b)** gäller $P(A \mid B) = \frac{4}{5}$. Sannolikheten att både Per och Pål blir förgiftade men hunden klarar sig är därför

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) = \frac{8}{11} \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{55} = 0.58181818$$

10. Betrakta figuren nedan där stora triangeln delas i 4 små liksidiga trianglar med sidlängd 1.



Välja 5 punkter i den stora triangel. Enligt postfacksprincippen måste minst två av dessa ligga i någon gemensam liten triangel. Dessa två punkterna har då avstånd högst 1. (I figuren ovan ligger de två blå punkter i samma triangel).