Lunds Tekniska Högskola
Matematik
Helsingborg

Lösningar, FMSF40
Sannolikhetsteori och Diskret Matematik
2023-08-25

1. a) Låt ξ vara värden på ett slumptal. Då $\xi \in R(-1,1)$ gäller

$$P(\xi > 0.2) = \int_{0.2}^{1} \tfrac{1}{1-(-1)}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1-0.2) = \tfrac{1}{2}\cdot 0.8 = 0.4.$$

b) Låt η vara antallet slumptal av tio på varandra följande som överstiger 0.2. Enligt **a)** gäller $\eta \in \mathrm{Bin}(10, 0.4)$. Den sökta sonnolikheten är då

$$\begin{aligned}
P(\eta \geq 3) &= 1 - P(\eta \leq 2) \\
&= 1 - \big(P(\eta = 0) + P(\eta = 1) + P(\eta = 2)\big) \\
&= 1 - \left(\binom{10}{0}\cdot 0.4^0 \cdot 0.6^{10} + \binom{10}{1}\cdot 0.4^1 \cdot 0.6^9 + \binom{10}{2}\cdot 0.4^2 \cdot 0.6^8\right) \\
&= 1 - \frac{1\,633\,689}{9\,765\,625} = 0.8327102464.
\end{aligned}$$

2. Sanningstabellen blir

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$\neg q$	$((p \vee q) \wedge r) \to \neg q$	$\neg\big(((p \vee q) \wedge r) \to \neg q\big)$
0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1

Påståendet är alltså sant precis när q och r båda är sanna.

3. Då samlada sannolikheten är 1 erhålls $0.4 + 0.1 + p + 0.1 = 1$, vilket ger $p = 0.4$. Vi har

$$E(\xi) = 1\cdot 0.4 + 2\cdot 0.1 + a\cdot 0.4 + 4\cdot 0.1 = 1 + 0.4a$$

och

$$E(\xi^2) = 1^2\cdot 0.4 + 2^2\cdot 0.1 + a^2\cdot 0.4 + 4^2\cdot 0.1 = 2.4 + 0.4a^2$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
V(\xi) &= E(\xi^2) - \big(E(\xi)\big)^2 = 2.4 + 0.4a^2 - (1 + 0.4a)^2 \\
&= 0.4a^2 + 2.4 - 1 - 0.16a^2 - 0.8a = 0.24a^2 - 0.8a + 1.4.
\end{aligned}$$

Då $V(\xi) = 1.16$ gäller alltså

$$0.24a^2 - 0.8a + 1.4 = 1.16 \iff 0.24a^2 - 0.8a + 0.24 = 0 \iff a^2 - \tfrac{10}{3}a + 1 = 0.$$

Denna ekvation lösas med pq-formeln

$$a = \tfrac{5}{3} \pm \sqrt{\left(\tfrac{5}{3}\right)^2 - 1} = \tfrac{5}{3} \pm \sqrt{\tfrac{25}{9} - \tfrac{9}{9}} = \tfrac{5}{3} \pm \tfrac{4}{3}$$

dvs. $a = 3$ eller $a = \frac{1}{3}$.

4. a) Antallet av elementer i $\mathcal{P}(A)$ ges av $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^{15} = 32\,768$.

b) Antallet delmängder med precis k elementer är antallat sätt att välja k elementer bland 15 elementer utan att ordningen spelar en roll. Detta antallet är $\binom{15}{k}$. Antallet delmängder med högst 4 element är därför

$$\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3} + \binom{15}{4} = 1 + 15 + 105 + 455 + 1365 = 1941.$$

5. Da $P(A^c) = \frac{7}{10}$ gäller $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$. Vi har

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(B) \cdot P(A \mid B) + P(B^c) \cdot P(A \mid B^c).$$

Insättning samt användning av $P(B^c) = 1 - P(B)$ ger nu

$$\tfrac{3}{10} = P(B) \cdot \tfrac{1}{4} + \big(1 - P(B)\big) \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\right) \cdot P(B) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{12} \cdot P(B).$$

Alltså gäller $\frac{1}{12} \cdot P(B) = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$ vilket ger $P(B) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$. Herav erhålls

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) = \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{10}.$$

Det sökte svar är därför

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \tfrac{3}{10} + \tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{10} = \tfrac{3}{5}.$$

6. a) Beräkning ger

$$\begin{aligned}
s_1 &= (1+1) \cdot 2^1 \\
&= 2 \cdot 2 = 4, \\
s_2 &= (1+1) \cdot 2^1 + (2+1) \cdot 2^2 \\
&= 4 + 3 \cdot 4 = 16, \\
s_3 &= (1+1) \cdot 2^1 + (2+1) \cdot 2^2 + (3+1) \cdot 2^3 \\
&= 16 + 4 \cdot 8 = 48, \\
s_4 &= (1+1) \cdot 2^1 + (2+1) \cdot 2^2 + (3+1) \cdot 2^3 + (4+1) \cdot 2^4 \\
&= 48 + 5 \cdot 16 = 128, \\
s_5 &= (1+1) \cdot 2^1 + (2+1) \cdot 2^2 + (3+1) \cdot 2^3 + (4+1) \cdot 2^4 + (5+1) \cdot 2^5 \\
&= 128 + 6 \cdot 32 = 320.
\end{aligned}$$

Då

$$\frac{s_1}{2^1} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{s_2}{2^2} = \frac{16}{4} = 4, \quad \frac{s_3}{2^3} = \frac{48}{8} = 6, \quad \frac{s_4}{2^4} = \frac{128}{16} = 8 \quad \text{och} \quad \frac{s_5}{2^5} = \frac{320}{32} = 10$$

gissar vi alltså på att $\frac{s_n}{2^n} = 2n$, dvs. $s_n = 2n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n+1}$.

b) Vi bevisar påståendet

$$s_n = n \cdot 2^{n+1}$$

för $n \geq 1$ från **a)** vha. matematisk induktion.

Bassteg: Vi har redan bevisat att påståendet gäller för $n = 1$ i **a)**.

Induktionssteg: Antag påståendet gäller för $n = p - 1$, dvs. att

$$s_{p-1} = (p-1) \cdot 2^{p-1+1} = (p-1) \cdot 2^p. \tag{$\star$}$$

Vi bevisar nu påståendet för $n = p$. Vi har

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_p = s_p &= \sum_{k=1}^{p} (k+1) \cdot 2^k \\
&= \underbrace{(1+1) \cdot 2^1 + \ldots + (p-1+1) \cdot 2^{p-1}}_{=s_{p-1}} + (p+1) \cdot 2^p \\
&= s_{p-1} + (p+1) \cdot 2^p \\
&\overset{(\star)}{=} (p-1) \cdot 2^p + (p+1) \cdot 2^p \\
&= \big((p-1) + (p+1)\big) \cdot 2^p \\
&= 2p \cdot 2^p \\
&= p \cdot 2^{p+1} \\
&= \mathrm{HL}_p.
\end{aligned}$$

Påståendet gäller alltså också för $n = p$. Enligt induktionsprincippen gäller påståendet alltså för alla $n \geq 1$.

7. a) Den samlada livslängd uppfyller

$$\xi_1 + \xi_2 \in N(100 + 105, \sqrt{10^2 + 20^2}) = N(205, 10\sqrt{5}).$$

Alltså gäller

$$\begin{aligned}
P(\xi_1 + \xi_2 > 200) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 \leq 200) &= 1 - \Phi\left(\frac{200 - 205}{10\sqrt{5}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right) = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right) \approx 0.58846836.
\end{aligned}$$

b) Då

$$\xi_1 - \xi_2 \in N(100 - 105, \sqrt{10^2 + 20^2}) = N(-5, 10\sqrt{5})$$

gäller

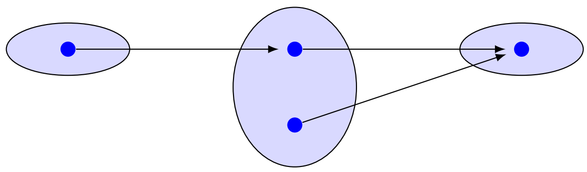
$$\begin{aligned} P(\xi_1 > \xi_2) = P(\xi_1 - \xi_2 > 0) = 1 - P(\xi_1 - \xi_2 \leq 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - (-5)}{10\sqrt{5}}\right) \\ = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right) \approx 0.41153164. \end{aligned}$$

8. En funktion $h\colon X \to Y$ är injektiv om det gäller $h(x) = h(x') \implies x = x'$.

a) Påståendet är sant. Anta att $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Då gäller $g(f(a)) = g(f(a'))$. Då g är injektiv gäller alltså $f(a) = f(a')$. Därmed är $a = a'$ då f är injektiv.

b) Påståendet är falskt. Betrakta avbildningerna nedan.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$



Då är båda f och $g \circ f$ injektiva, men g är inte injektiv.

c) Påståendet är sant. Anta att $f(a) = f(a')$. Då är $g(f(a)) = g(f(a'))$ varav

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = (g \circ f)(a').$$

Då $g \circ f$ är injektiv erhålls $a = a'$.

9. **a)** Påståendet är sant. Låt ξ vara antalet ögon vid ett tärningskast och betrakta händelserna

$$A\colon \xi = 1 \text{ eller } \xi = 2 \quad \text{och} \quad B\colon \xi = 3,\ \xi = 4 \text{ eller } \xi = 5.$$

Då gäller $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ och $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Dessutom gäller $P(A \cap B) = 0$. Händelserna A och B är alltså disjunkta.

b) Påståendet är sant. Låt igen ξ vara antalet ögon vid ett tärningskast. Betrakta nu händelserna

$$C\colon \xi = 1 \text{ eller } \xi = 2 \quad \text{och} \quad D\colon \xi = 1,\ \xi = 4 \text{ eller } \xi = 5.$$

Då gäller $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Dessutom gäller $P(C \cap D) = P(\xi = 1) = \frac{1}{6}$. Då

$$P(C \cap D) = \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} = P(C) \cdot P(D)$$

är händelserna C och D alltså oberoende.

10. **a)** Antallet delmängder av S är $2^{|S|} = 2^5 = 32$. Antallet icke-tomma delmängder av S är därför $32 - 1 = 31$. Summen av tallen i en icke-tom delmængd av S är minst 1 och högst $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$. Summen av tallen i en delmängd av S är alltså mellan 1 och 30 så det finns högst 30 möjliga summor. Då det finns $31 > 30$ icke-tomma delmängder av S finns det enligt postfacksprincippen två olika icke-tomma delmängder av S så att tallen i de två delmängder har samma sum.

b) Påståendet i **a)** gäller även om $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 9\}$ med $|S| = 5$. Vi betrakter nu endast delmängder av S med högst 3 elementer. Antallet icke-tomma sådanna är

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 5 + 10 + 10 = 25.$$

Minsta möjliga summa av tallen i en icke-tom delmängd med högst 3 element är fortfarande 1. Högsta möjliga summa är nu $7 + 8 + 9 = 24$. Det finns alltså högst 24 möjliga summor och 25 delmängder. Enligt postfacksprincippen gäller påståendet i **a)** alltså också i detta fall.

Anmärkning: Påståendet gäller även om $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 12\}$, men inte om $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 13\}$: Mängden $S = \{3, 6, 11, 12, 13\}$ innehåller inte två olika icke-tomma delmängder A och B så talen i A och talen i B har samma summa.