Lunds Tekniska Högskola
Matematik
Helsingborg

Lösningar, FMSF40
Sannolikhetsteori och Diskret Matematik
2023-04-12

1) Låt ξ beteckna vikten av en påsa, vi har då $\xi \in N(m, 5)$. Därför gäller

$$\begin{aligned}
P(\xi \geq 500) = 0.99 &\iff P(\xi < 500) = 0.01 \\
&\iff \Phi\left(\frac{500-m}{5}\right) = 0.01 \\
&\iff \frac{500-m}{5} = \Phi^{-1}(0.01) = -2.326348 \\
&\iff m = 500 + 5 \cdot 2.326348 = 511.6317
\end{aligned}$$

Alltså gäller $m = 511.6317$.

2a) Då $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$ gäller

$$|B \cap C| = |B| + |C| - |B \cup C| = 13 + 15 - 22 = 6.$$

Vi har nu

$$\begin{aligned}
&|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \iff \\
&27 = 11 + 13 + 15 - 5 - |A \cap C| - 6 + 2 \iff \\
&27 = 30 - |A \cap C|.
\end{aligned}$$

Alltså gäller $|A \cap C| = 3$.

2b) Vi har $|X| = 4$ och $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ varför $|Y| = 7$. Altså gäller

$$|X \times Y| = |X||Y| = 4 \cdot 7 = 28.$$

Antallet delmängder till $X \times Y$ er därför $2^{|X \times Y|} = 2^{28} = 268\,435\,456$.

3a) Vi har

$$\begin{aligned}
P(\text{A eller B} \mid \text{ inte DN}) &= \frac{P\big((\text{A eller B}) \text{ och inte DN}\big)}{P(\text{inte DN})} \\
&= \frac{P\big((\text{A och inte DN}) \text{ eller } (\text{B och inte DN})\big)}{0.05 + 0.06 + 0.49} \\
&= \frac{P(\text{A och inte DN}) + P(\text{B och inte DN})}{0.05 + 0.06 + 0.49} \\
&= \frac{0.05 + 0.06}{0.6} = \frac{0.11}{0.6} = \frac{11}{60} = 0.1833
\end{aligned}$$

3b) Vi har $P(\text{DN}) = 0.10 + 0.04 + 0.26 = 0.4$, $P(\text{A}) = 0.10 + 0.05 = 0.15$ och $P(\text{DN och A}) = 0.10$. Alltså gäller $P(\text{DN})P(\text{A}) = 0.4 \cdot 0.15 = 0.06 \neq P(\text{DN och A})$, dvs. de två händelserna är *inte* oberoende.

4) Beräkning ger sanningtabellen

p	q	r	$\neg q$	$(\neg q) \to r$	$\big((\neg q) \to r\big) \wedge p$	$p \leftrightarrow q$	$\Big(\big((\neg q) \to r\big) \wedge p\Big) \vee (p \leftrightarrow q)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1

De värden på p, q och r som gör satsen $\Big(\big((\neg q) \to r\big) \wedge p\Big) \vee (p \leftrightarrow q)$ sann är markeret med grå färg i tabellen.

5a) Då

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \frac{k}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = k\int_0^4 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = k\left[2x^{1/2}\right]_0^4 = k\left(2\sqrt{4} - 2\cdot 0\right) = 4k,$$

erhålls $k = \frac{1}{4}$.

5b) Väntevärdet blir

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x\cdot\frac{1/4}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^4 x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} - \tfrac{2}{3}\cdot 0\right) = \tfrac{4}{3}. \end{aligned}$$

Då

$$\begin{aligned} E\left(\xi^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x^2\cdot\frac{1/4}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^4 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2}{5}\cdot 4^2\sqrt{4} - \tfrac{2}{5}\cdot 0\right) = \tfrac{16}{5}, \end{aligned}$$

blir variansen

$$V(\xi) = E\left(\xi^2\right) - \left(E\left(\xi\right)\right)^2 = \tfrac{16}{5} - \left(\tfrac{4}{3}\right)^2 = \tfrac{16}{5} - \tfrac{16}{9} = \tfrac{64}{45}.$$

6a) Det finns $S(12,3) = 86\,526$ sätt att fördela leksakerna i tre icke-tomma högar. Varje sådan fördelning ger upphov till $3! = 6$ sätt att fördela de tre högar till de tre barn. Total finns alltså

$$S(12,3)\cdot 3! = 86\,526\cdot 6 = 519\,156$$

sätt att fördela leksakerna på.

6b) Det finns $\binom{12}{4} = 495$ sätt att välja leksaker till Knatte. Det finns därefter $\binom{8}{4} = 70$ sätt att välja leksaker till Fnatte. Tjatte får derför de sista 4, dvs. det finns endast $\binom{4}{4} = 1$ val. Total finns alltså

$$\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = 495\cdot 70\cdot 1 = 34\,650$$

sätt att fördela leksakerna på om alla barnen ska ha lika många.

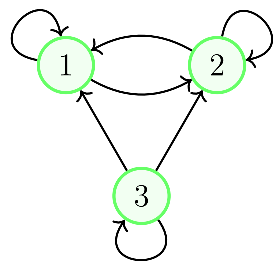
7) Låt ξ_i beteckna livslängden för i:ta säkring. Då $\xi_i \in \mathrm{Exp}(\lambda)$ och $E(\xi_i) = {}^1\!/\!_\lambda = 0.5$ gäller $\lambda = 2$. Dessutom gäller $V(\xi_i) = ({}^1\!/\!_\lambda)^2 = {}^1\!/\!_4$. Centrala gränsvärdessatsen ger då att $\eta = \sum_{i=1}^{100} \xi_i$ approximativt är $N\left(100 \cdot \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{100}\right) = N(50, 5)$. Approximativa sannolikheten är då

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} \xi_i > 47\right) = P\left(\frac{\eta - 50}{5} > \frac{47-50}{5}\right) \approx 1 - \Phi(-{}^3\!/\!_5) = \Phi({}^3\!/\!_5) \cong 0.72574688.$$

Mer precist gäller att $\eta \in \Gamma(100, 2)$ (så kallade gammafördelningen) vilket ger exakta sannolikheten

$$P(\eta > 47) = \frac{2^{100}}{99!} \int_{47}^{\infty} x^{99} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = e^{-94} \sum_{i=0}^{99} \frac{94^i}{i!} \cong 0.71868091.$$

8a) Det finns fler sådanna relationer, en möjlighet är relationen $\mathcal{R}$ med grafen



Denna relation är reflexiv då $1\,\mathcal{R}\,1$, $2\,\mathcal{R}\,2$ och $3\,\mathcal{R}\,3$. Relationen är inte symmetrisk då $3\,\mathcal{R}\,1$ men $1\,\not\mathcal{R}\,3$. Relationen är inte heller antisymmetrisk då $1\,\mathcal{R}\,2$ och $2\,\mathcal{R}\,1$ men $1 \neq 2$. Vi viser slutligen att $\mathcal{R}$ är transitiv. Relationsmatrisen är

$$\mathsf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$(\mathsf{M}_{\mathcal{R}})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathsf{M}_{\mathcal{R}} \odot \mathsf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{M}_{\mathcal{R}}.$$

Alltså gäller $\mathsf{M}_{\mathcal{R}} \odot \mathsf{M}_{\mathcal{R}} \leq \mathsf{M}_{\mathcal{R}}$ varför $\mathcal{R}$ är transitiv.

8b) Anta att $\mathcal{R}$ är en relation på A som inte är transitiv. Då finns därför $x, y, z \in A$ så att $x\,\mathcal{R}\,y$, $y\,\mathcal{R}\,z$ och $x\,\not\mathcal{R}\,z$. Om $x = y$ erhålls $x\,\mathcal{R}\,z$ då $y = x$, men detta är en motsägelse då $x\,\not\mathcal{R}\,z$. Alltså gäller $x \neq y$. Vi betraktar nu två fall

- $y\,\mathcal{R}\,x$: I detta fall är R inte antisymmetrisk då $x \neq y$, $x\,\mathcal{R}\,y$ och $y\,\mathcal{R}\,x$.

- $y \not\mathcal{R} x$: I detta fall är R inte symmetrisk då $x\mathcal{R}y$ och $y\not\mathcal{R}x$.

Alltså är R antigen inte symmetrisk eller inte antisymmetrisk.

9) Låt ξ_2 vara antallet av motorer som fungerar i ett tvåmotorigt plan och ξ_4 vara antallet av motorer som fungerar i ett fyrmotorigt plan. Vi har då $\xi_2 \in \text{Bin}(2, p)$ och $\xi_4 \in \text{Bin}(4, p)$. Sannolikheten att de två plan kan flyga är då $p_2 = P(\xi_2 \geq 1)$ och $p_4 = P(\xi_4 \geq 2)$ respektiva och ett fyrmotorigt plan är säkrare än ett tvåmotorigt om $p_4 > p_2$. Beräkning ger

$$p_2 = P(\xi_2 \geq 1) = 1 - P(\xi_2 = 0) = 1 - \binom{2}{0} p^0(1-p)^2 = 1 - (1-p)^2,$$

$$\begin{aligned} p_4 = P(\xi_4 \geq 2) = 1 - P(\xi_4 \leq 1) &= 1 - \left(\binom{4}{0} p^0(1-p)^4 + \binom{4}{1} p^1(1-p)^3 \right) \\ &= 1 - \left((1-p)^4 + 4p(1-p)^3\right). \end{aligned}$$

Vi har därför

$$\begin{aligned} p_4 > p_2 &\iff 1 - \left((1-p)^4 + 4p(1-p)^3\right) > 1 - (1-p)^2 \\ &\iff (1-p)^2 - (1-p)^4 - 4p(1-p)^3 > 0 \\ &\iff (1-p)^2 \left(1 - (1-p)^2 - 4p(1-p)\right) > 0 \\ &\iff (1-p)^2 \Big(1 - \left(1 - 2p + p^2\right) - \left(4p - 4p^2\right)\Big) > 0 \\ &\iff (1-p)^2 \left(1 - 1 + 2p - p^2 - 4p + 4p^2\right) > 0 \\ &\iff (1-p)^2 \left(3p^2 - 2p\right) > 0 \\ &\iff (1-p)^2 p(3p-2) > 0. \end{aligned}$$

Då $0 \leq p \leq 1$ gäller alltså att $p_4 > p_2$ om $1 - p \neq 0$, $p \neq 0$ och $3p - 2 > 0$ dvs. om $2/3 < p < 1$.

10) Vi bevisar påståendet

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

för $n \geq 1$ från uppgiften vid hjälp av matematisk induktion.
Bassteg: Vi har $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$. För $n = 1$ gäller därför

$$\text{VL}_1 = f_2 f_0 - f_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1$$

och $\text{HL}_1 = (-1)^1 = -1$. Vi har alltså $\text{VL}_1 = \text{HL}_1$ dvs. påståendet gäller för $n = 1$.
Induktionssteg: Antag påståendet gäller för $n = p - 1$, dvs.

$$f_p f_{p-2} - f_{p-1}^2 = (-1)^{p-1}. \tag{$\star$}$$

Vi bevisar påståendet för $n = p$. Från definitionen av Fibonaccitalen erhålls

$$f_{p+1} = f_p + f_{p-1} \quad \text{och} \quad f_p = f_{p-1} + f_{p-2}.$$

Vi har därför

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VL}_p &= f_{p+1}f_{p-1} - f_p^2 \\
&= (f_p + f_{p-1})f_{p-1} - f_p(f_{p-1} + f_{p-2}) \\
&= f_p f_{p-1} + f_{p-1}^2 - f_p f_{p-1} - f_p f_{p-2} \\
&= f_{p-1}^2 - f_p f_{p-2} \\
&= -\left(\underbrace{f_p f_{p-2} - f_{p-1}^2}\right) \\
&\overset{(\star)}{=} -(-1)^{p-1} \\
&= (-1)\cdot(-1)^{p-1} \\
&= (-1)^p \\
&= \mathrm{HL}_p.
\end{aligned}
$$

Påståendet gäller alltså också för $n = p$. Enligt induktionsprincippen gäller påståendet alltså för alla $n \geq 1$.