Lunds Tekniska Högskola
Matematik
Helsingborg

Lösningar, FMSF40
Sannolikhetsteori och Diskret Matematik
2022-10-28

1a) Vi använder beteckningerna 1 för krone och 0 för klave. Det totale antallet möjligheter är $2^3 = 8$. Vi har

$$A = \{001, 010, 011, 100, 101, 110\} \qquad \text{och} \qquad B = \{000, 001, 010, 011\}.$$

Alltså gäller

$$P(A) = \tfrac{6}{8} = \tfrac{3}{4} \qquad \text{och} \qquad P(B) = \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2}.$$

1b) Vi har

$$A \cap B = \{001, 010, 011\}$$

vilket ger $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Då

$$P(A) \cdot P(B) = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{8}$$

gäller $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, dvs. A och B är oberoende.

2) Sanningsvärdestabellen nedan visar at om båda hypoteserna $q \to p$ och $r \to p$ är sanna, då är konklusionen $(q \vee r) \to p$ också sann. Det logiska argument är alltså giltigt.

p	q	r	$q \vee r$	$q \to p$	$r \to p$	$(q \vee r) \to p$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Alternativ: Vha. en sanningsvärdetabell ser man att uttrycket

$$((q \to p) \wedge (r \to p)) \to ((q \vee r) \to p)$$

är en tautologi:

p	q	r	$q \to p$	$r \to p$	$(q \to p) \wedge (r \to p)$	$q \vee r$	$(q \vee r) \to p$	$((q \to p) \wedge (r \to p)) \to ((q \vee r) \to p)$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

3a) Låt D beteckna händelsen att enheten är defekt. Vi vet då att

$$P(A) = 0.4, \qquad P(D|A) = 0.05, \qquad \text{och} \qquad P(D|B) = 0.1$$

Alltså gäller

$$P(D \cap A) = P(D|A) \cdot P(A) = 0.05 \cdot 0.4 = 0.02$$
$$P(D \cap B) = P(D|B) \cdot P(B) = 0.1 \cdot (1 - 0.4) = 0.06$$

Vi har nu

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = 0.02 + 0.06 = 0.08$$

3b) Den sökte sannolikhet är

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0.06}{0.08} = 0.75$$

4) $\mathcal{R}$ är reflexiv: Vi har $a \mathcal{R} a$, $b \mathcal{R} b$, $c \mathcal{R} c$ och $d \mathcal{R} d$.

$\mathcal{R}$ är inte symmetrisk: Vi har $b \mathcal{R} a$ men $a \not\mathcal{R} b$.

$\mathcal{R}$ är antisymmetrisk: Vi kollar att för alla par x, y med $x \neq y$ gäller antigen $x \not\mathcal{R} y$ eller $y \not\mathcal{R} x$. Det finns $\binom{4}{2} = 6$ möjliga par

$$\begin{aligned} a, b: &\quad a \not\mathcal{R} b \\ a, c: &\quad a \not\mathcal{R} c \\ a, d: &\quad a \not\mathcal{R} d \\ b, c: &\quad b \not\mathcal{R} c \\ b, d: &\quad d \not\mathcal{R} b \\ c, d: &\quad c \not\mathcal{R} d \end{aligned}$$

Detta beviser påståendet. Det följer att om $x \mathcal{R} y$ och $y \mathcal{R} x$ måste $x = y$. Alltså är $\mathcal{R}$ antisymmetrisk. Alternatict kann man rita relationsgrafen och de ända dubbelriktade pilor är öglar.

$\mathcal{R}$ är inte transitiv: Vi har $b \mathcal{R} d$ och $d \mathcal{R} c$ men $b \not\mathcal{R} c$.

$\mathcal{R}$ är inte en ekvivalensrelation då $\mathcal{R}$ inte är symmetrisk ($\mathcal{R}$ är inte transitiv heller).

5a) Då

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \tfrac{1}{4}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 k\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} \cdot (1 - 0) + k \cdot (2 - 1) = \tfrac{1}{4} + k,$$

erhålls $k = \frac{3}{4}$.

5b) För $x < 0$ gäller

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

För $0 \leq x < 1$ gäller

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \tfrac{1}{4} \,\mathrm{d}t = 0 + \tfrac{1}{4}(x-0) = \tfrac{1}{4}x.$$

För $1 \leq x < 2$ gäller

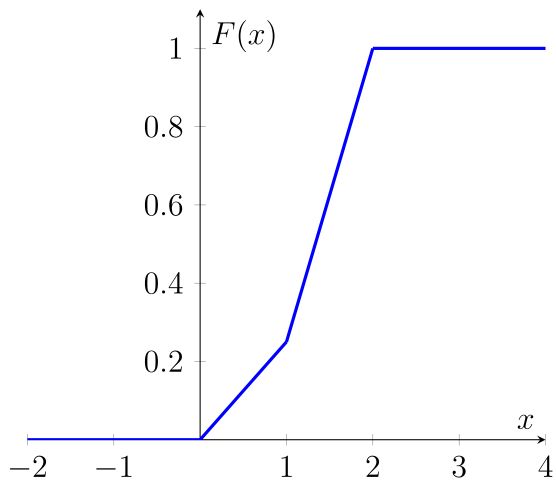
$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \tfrac{1}{4} \,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} k \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}(x-1) = \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{2}.$$

För $2 \leq x$ gäller

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \tfrac{1}{4} \,\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} k \,\mathrm{d}t + \int_{2}^{x} 0 \,\mathrm{d}t = 1 + 0 = 1.$$

Samlet gäller alltså

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ \tfrac{1}{4}x & \text{om } 0 \leq x < 1 \\ \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{2} & \text{om } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{om } 2 \leq x \end{cases}$$



5c) Väntevärdet blir

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x \cdot \tfrac{1}{4} \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} x \cdot \tfrac{3}{4} \,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^1 + \left[\frac{3x^2}{8}\right]_1^2 = \frac{1}{8} - 0 + \frac{3}{2} - \frac{3}{8} = \frac{5}{4} = 1.25 \end{aligned}$$

6a) Beräkning ger

x	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$f(x)$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$

Tex. gäller

$$f\left([4]_6\right) = ([4]_6)^3 = [4^3]_6 = [64]_6 = [10 \cdot 6 + 4]_6 = [4]_6.$$

Vi ser alltså att $f(x) = x$ så f är injektiv.

6b) Beräkning ger

x	$[0]_9$	$[1]_9$	$[2]_9$	$[3]_9$	$[4]_9$	$[5]_9$	$[6]_9$	$[7]_9$	$[8]_9$
$g(x)$	$[0]_9$	$[1]_9$	$[8]_9$	$[0]_9$	$[1]_9$	$[8]_9$	$[0]_9$	$[1]_9$	$[8]_9$

Värdemängden blir alltså $V_g = \{[0]_9, [1]_9, [8]_9\} \neq \mathbb{Z}_9$ så g är inte surjektiv.

7a) Om ξ är antallet ettor gäller $\xi \in \text{Bin}(6, 1/6)$. Sannolikheten för ett udda antal ettor är

$$\begin{aligned} P(\xi \text{ udda}) &= P(\xi = 1) + P(\xi = 3) + P(\xi = 5) \\ &= \binom{6}{1}\left(\tfrac{1}{6}\right)^1\left(\tfrac{5}{6}\right)^5 + \binom{6}{3}\left(\tfrac{1}{6}\right)^3\left(\tfrac{5}{6}\right)^3 + \binom{6}{5}\left(\tfrac{1}{6}\right)^5\left(\tfrac{5}{6}\right)^1 = \frac{665}{1458} = 0.4561 \end{aligned}$$

Detta ger

$$P(\xi \text{ jämn}) = 1 - P(\xi \text{ udda}) = 1 - \frac{665}{1458} = \frac{793}{1458} = 0.5439$$

Alltså är det störst chans för ett *jämnt* antal ettor. (Observera att 0 här såklart räknas som ett jämnt tal!)

7b) Låt η beteckna antallet russin per bulle. Då η är Poissonfördelad med $E(\eta) = \lambda$ gäller $\eta \in \text{Po}(\lambda)$. Sannolikheten att få minst en russin per bulle är alltså

$$P(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta = 0) = 1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda}.$$

Vi söker alltså det minsta värde på λ så att

$$P(\eta \geq 1) \geq 0.95 \iff 1 - e^{-\lambda} \geq 0.95 \iff e^{-\lambda} \leq 0.05 \iff \lambda \geq \ln(20) = 2.996$$

Minsta värdet för λ är alltså 2.996. Detta betyder alltså att man måste ha minst 3 russiner per bulla för att minst 95% av bullerna har minst en russin!

8a) Om lådorna är identiska finns det $S(8, 3) = 966$ sätt att fördela kulorna. Varje sådan fördelning ger upphov till $3! = 6$ fördelningar då lådorna är olika och därför kann permuteras. Total finns alltså

$$S(8, 3) \cdot 3! = 966 \cdot 6 = 5796$$

sätt att fördela kulorna på.

8b) Kulorna hamnar antigen i 1, 2 eller 3 lådor (motsvarende att 2, 1 respektiva inga tomma lådor). Det finns alltså

$$S(8, 1) + S(8, 2) + S(8, 3) = 1 + 127 + 966 = 1094$$

sätt att fördela kulorna på.

9) Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{20}$ vara längden av järnbitarna från Sparta och $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{24}$ vara längden av järnbitarna från Ithaca. Vi har $\xi_i \in N(5, 1.5)$ och $\eta_i \in N(4, 0.5)$. Den totale längd

$$\zeta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{20} + \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{24}$$

uppfyller $\zeta \in N(\mu, \sigma)$ där

$$\mu = \underbrace{5 + 5 + \ldots + 5}_{\text{20 gångar}} + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{\text{24 gångar}} = 20 \cdot 5 + 24 \cdot 4 = 196,$$

$$\sigma^2 = \underbrace{1.5^2 + 1.5^2 + \ldots + 1.5^2}_{\text{20 gångar}} + \underbrace{0.5^2 + 0.5^2 + \ldots + 0.5^2}_{\text{24 gångar}} = 20 \cdot 1.5^2 + 24 \cdot 0.5^2 = 51$$

enligt Sats 6.4. Alltså gäller

$$P(\zeta > 200) = 1 - P(\zeta \leq 200) = 1 - \Phi\left(\frac{200 - 196}{\sqrt{51}}\right) = 1 - 0.7123 = 0.2877$$

10) Låt $s_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$. Det är *inte* helt enkelt att bevisa påståendet $s_n < 2$ direkta vha. induktion (se alternativa lösningen nedanför). Vi formulerar därför en mer lämplig induktionshypotes.
Beräkning ger (vi använder för enkelthetens skull den gemensamma nämnaren 2^n för s_n):

$$\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{2^1} = \tfrac{1}{2} \\
s_2 &= \underbrace{\tfrac{1}{2^1}}_{s_1} + \tfrac{2}{2^2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{4} = \tfrac{4}{4} \\
s_3 &= \underbrace{\tfrac{1}{2^1} + \tfrac{2}{2^2}}_{s_2} + \tfrac{3}{2^3} = \tfrac{4}{4} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{11}{8} \\
s_4 &= \underbrace{\tfrac{1}{2^1} + \tfrac{2}{2^2} + \tfrac{3}{2^3}}_{s_3} + \tfrac{4}{2^4} = \tfrac{11}{8} + \tfrac{4}{16} = \tfrac{26}{16} \\
s_5 &= \underbrace{\tfrac{1}{2^1} + \tfrac{2}{2^2} + \tfrac{3}{2^3} + \tfrac{4}{2^4}}_{s_3} + \tfrac{5}{2^5} = \tfrac{26}{16} + \tfrac{5}{32} = \tfrac{57}{32}
\end{aligned}$$

Vi bildar nu differensen $2 - s_n$ (vi vill visa att $2 - s_n > 0$):

n	1	2	3	4	5
$2 - s_n$	$3/2$	$4/4$	$5/8$	$6/16$	$7/32$

Från tabellen ses att ett möjligt system är $2 - s_n = \frac{n+2}{2^n}$ eller ekvivalent att

$$P(n)\colon \quad s_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \tag{1}$$

Vi viser nu detta vha. induktion. Påståendet $P(1)$ gäller då $\text{VL}_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ och $\text{HL}_1 = 2 - \frac{1+2}{2^1} = \frac{1}{2}$.

Anta nu att påståendet $P(p)$ gäller. Vi har då

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{p+1} &= \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{p}{2^p} + \frac{p+1}{2^{p+1}} \\
&= \left(\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{p}{2^p}\right) + \frac{p+1}{2^{p+1}} \\
&\overset{P(p)}{=} \left(2 - \frac{p+2}{2^p}\right) + \frac{p+1}{2^{p+1}} \\
&= 2 - \frac{2(p+2)}{2^{p+1}} + \frac{p+1}{2^{p+1}} \\
&= 2 - \frac{2p+4-p-1}{2^{p+1}} \\
&= 2 - \frac{p+3}{2^{p+1}}
\end{aligned}$$

och

$$\mathrm{HL}_{p+1} = 2 - \frac{(p+1)+2}{2^{p+1}} = 2 - \frac{p+3}{2^{p+1}}$$

Påståendet (1) gäller alltså för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. Speciellt gäller

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} < 2$$

för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ vilket skulla bevisas.

Alternativ lösning: Låt $s_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$. Observera att

$$\begin{aligned}
2s_{n+1} &= 2\left(\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots + \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) \\
&= 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots + \frac{n+1}{2^n} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1}\right) + \left(\frac{2}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= s_n + \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)
\end{aligned}$$

Den sista termen är en geometrisk summa med kvot $1/2$, första term 1 och $n+1$ termer totalt vilket ger

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Alltså gäller

$$2s_{n+1} = s_n + 2 - \frac{1}{2^n} < s_n + 2$$

vilket ger

$$s_{n+1} < \tfrac{1}{2}s_n + 1 \tag{2}$$

Vi kan nu lätt bevisa påståendet

$$Q(n): \quad s_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} < 2 \tag{3}$$

vha. induktion. Påståendet $Q(1)$ gäller då $\mathrm{VL}_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ och $\mathrm{HL}_1 = 2$. Anta nu att påståendet $Q(p)$ gäller, dvs. $s_p < 2$. Från (2) och (3) erhålls

$$s_{p+1} < \tfrac{1}{2}s_p + 1 < \tfrac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

vilket precis är påståendet $Q(p+1)$. Påståendet (3) gäller alltså för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.