Lunds Tekniska Högskola — **Lösningar, FMSF40**
Matematik — **Sannolikhetsteori och Diskret Matematik**
Helsingborg — **2022-08-26**

1) Då

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a 3x + 2\,\mathrm{d}x + \int_a^{2a} 3x + 3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^a + \left[\frac{3}{2}x^2 + 3x\right]_a^{2a}$$
$$= \frac{3}{2}a^2 + 2a - 0 + 6a^2 + 6a - \frac{3}{2}a^2 - 3a = 6a^2 + 5a,$$

gäller $6a^2 + 5a - 1 = 0 \iff a^2 + \frac{5}{6}a - \frac{1}{6} = 0$. Lösning med pq-formeln ger $a = -1$ eller $a = \frac{1}{6}$. Då $a > 0$ erhålls $a = \frac{1}{6}$. Väntevärdet blir

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/6} x \cdot (3x+2)\,\mathrm{d}x + \int_{1/6}^{2/6} x \cdot (3x+3)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[x^3 + x^2\right]_0^{1/6} + \left[x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{1/6}^{1/3} = \frac{1}{216} + \frac{1}{36} - 0 + \frac{1}{27} + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} - \frac{1}{24} = \frac{41}{216}$$
$$= 0.189815$$

2) $\mathcal{R}$ är reflexiv: Vi har $a\,\mathcal{R}\,a$ för alla $a \in \mathbb{Z}_+$ då $a = a^1$.

$\mathcal{R}$ är inte symmetrisk: Tex. gäller $9\,\mathcal{R}\,3$ (ty $9 = 3^2$), men $3 \not\mathcal{R}\, 9$ (det finns inget $k \in \mathbb{Z}_+$ så att $3 = 9^k$).

$\mathcal{R}$ är antisymmetrisk: Anta att $a\,\mathcal{R}\,b$ och $b\,\mathcal{R}\,a$. Då finns $k, l \in \mathbb{Z}_+$ så att $a = b^k$ och $b = a^l$. Då gäller $a = b^k = \left(a^l\right)^k = a^{kl}$ och logaritmer ger då att $\ln(a) = kl \cdot \ln(a)$. Det finns då två fall: $\ln(a) = 0$ eller $1 = kl$. Om $\ln(a) = 0$ är $a = 1$ och $b = a^l = 1^l = 1 = a$. Om $kl = 1$ är $k = l = 1$ och $a = b^k = b^1 = b$. I båda fall är alltså $a = b$ vilket beviser att $\mathcal{R}$ är antisymmetrisk.

$\mathcal{R}$ är transitiv: Om $a\,\mathcal{R}\,b$ och $b\,\mathcal{R}\,c$ finns $k, l \in \mathbb{Z}_+$ så att $a = b^k$ och $b = c^l$. Då gäller $a = b^k = \left(c^l\right)^k = c^{kl}$, dvs. $a\,\mathcal{R}\,c$.

3) Låt ξ beteckna antallet ess som spelaren har fått. Då är ξ hypergeometrisk fördelad, $\xi \in \mathrm{Hyp}(52, 13, 4/52)$. Den sökte sannolikheten är

$$P(\xi \geq 2 \mid \xi \geq 1) = \frac{P(\xi \geq 2 \text{ och } \xi \geq 1)}{P(\xi \geq 1)} = \frac{P(\xi \geq 2)}{P(\xi \geq 1)} = \frac{1 - P(\xi \leq 1)}{1 - P(\xi = 0)}$$

Då

$$P(\xi = 0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} = \frac{6327}{20825}$$

och

$$P(\xi = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} = \frac{9139}{20825}$$

gäller alltså

$$P(\xi \geq 2 \mid \xi \geq 1) = \frac{1 - \big(P(\xi = 1) + P(\xi = 0)\big)}{1 - P(\xi = 0)} = \frac{1 - \left(\frac{9139}{20825} + \frac{6327}{20825}\right)}{1 - \frac{6327}{20825}} = \frac{5359}{14498} = 0.369637$$

4) Vi har

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 + 1 = x + 1 + 1 = x + 2.$$

Funktionen $f \circ g$ är därför injektiv då

$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Longrightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Funktionen $f \circ g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ är dock inte surjektiv då $\mathrm{Vm}(f \circ g) =]2; \infty[\neq \mathbb{R}_+$.
Vi har

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \sqrt{h(x)+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Funktionen $g \circ h$ är inte injektiv (tex är $(g \circ h)(1) = \sqrt{2} = (g \circ h)(2)$ men $1 \neq 2$) och inte surjektiv då $\mathrm{Vm}(g \circ h) = \{\sqrt{2}\} \neq \mathbb{R}_+$.

5) Sannolikheten för att årsnedbörden överstiger 350 mm ett givet år är

$$p = P(\xi > 350) = 1 - P(\xi \leq 350) = 1 - \Phi\left(\frac{350 - 300}{25}\right) = 1 - \Phi(2).$$

Låt η beteckna antallet år där ärsnederbörden överstiger 350 mm. Enligt ovan gäller $\eta \in \mathrm{Bin}(10, p)$. Den sökte sannolikheten är då

$$P(\eta \geq 1) = 1 - P(\eta = 0) = 1 - (1-p)^{10} = 1 - \Phi(2)^{10} = 1 - 0.977250^{10} = 0.205569$$

6) Vi bevisar påståendet

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$$

från uppgiften vid hjälp av matematisk induktion.
Bassteg: Observera att enligt definition av fibonaccitalen gäller $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 0 = 1$. För $n = 1$ gäller $\mathrm{VL}_1 = f_1^2 = 1^2 = 1$ och $\mathrm{HL}_1 = f_1 f_2 = 1 \cdot 1 = 1$ enligt beräkningen ovan. Vi har alltså $\mathrm{VL}_1 = \mathrm{HL}_1$ dvs. påståendet gäller för $n = 1$.
Induktionssteg: Antag påståendet gäller för $n = p$, dvs.

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_p^2 = f_p f_{p+1}. \tag{$\star$}$$

Vi bevisar nu påståendet för $n = p + 1$ vha. $(\star)$. Vi har

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{p+1} &= f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_{p+1}^2 \\
&= \underbrace{f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_p^2} + f_{p+1}^2 \\
&\overset{(\star)}{=} \underbrace{f_p f_{p+1}} + f_{p+1}^2 \\
&= f_{p+1}(f_p + f_{p+1}) \\
&\overset{(\triangle)}{=} f_{p+1} f_{p+2} \\
&= \mathrm{HL}_{p+1},
\end{aligned}$$

där vi vid $(\triangle)$ har utnyttjat att $f_p + f_{p+1} = f_{p+2}$ vilket följer från definitionen av fibonaccitalen. Påståendet gäller alltså också för $n = p + 1$. Enligt induktionsprincippen gäller påståendet alltså för alla $n \geq 1$.

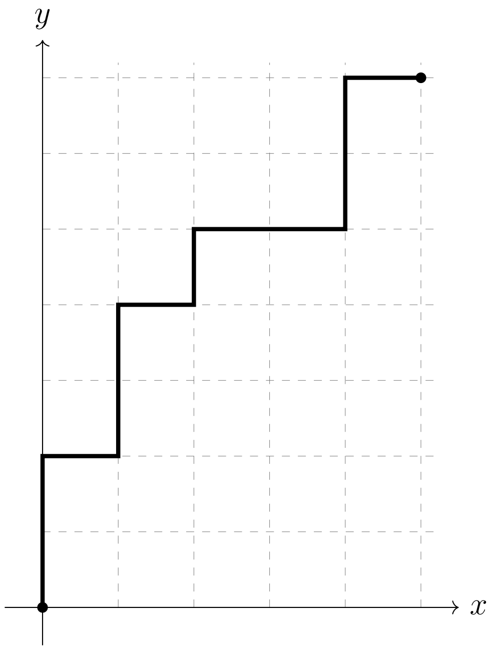
7) Låt ξ_1 beteckna livslängden för del 1 av komponenten. Då ξ_1 är exponentialfördelad, $\xi_1 \in \text{Exp}(\lambda)$, blir väntevärdet $E(\xi_1) = {}^1\!/\!_\lambda = 2$. Alltså gäller $\lambda = {}^1\!/\!_2$. Vi har nu

$$P(\xi_1 < 3) = \int_0^3 \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_0^3 = -e^{-3\lambda} - (-1) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - e^{-3/2}.$$

På samma sätt erhålls $P(\xi_2 < 3) = 1 - e^{-3/2}$, där ξ_2 är livslängden för del 2 av komponenten. Då livslängderna ξ_1 och ξ_2 är oberoende är sannolikheten för att komponenten fungerar efter 3 timmor:

$$\begin{aligned} P(\xi_1 \geq 3 \text{ eller } \xi_2 \geq 3) &= 1 - P(\xi_1 < 3 \text{ och } \xi_2 < 3) \\ &= 1 - P(\xi_1 < 3) \cdot P(\xi_2 < 3) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-3/2}\right) \cdot \left(1 - e^{-3/2}\right) \\ &= 0.396473 \end{aligned}$$

8) En nordost väg från $(0,0)$ till $(5,7)$ består av 12 steg där 5 är åt höger (O) och 7 är uppåt (N). Tex ges vägen nedan av "NNONNONOONNO".



Vi ska alltså välja 5 av 12 positioner (de 5 "O" positionerna) för att ange en väg. Alltså finns precis $\binom{12}{5} = 792$ nordost vägar från $(0,0)$ till $(5,7)$.

9) Om ξ_i betecknar vikten av den i:ta passagerare gäller $\xi_i \in N(81, 3.5)$. Då vikterna är oberoende ger Sats 6.4 att totala vikten $\eta = \xi_1 + \xi_2 \ldots + \xi_{21}$ är normalfördelad, $\eta \in N(21 \cdot 81, 3.5\sqrt{21})$. Alltså gäller

$$\begin{aligned} P(\eta > 1740) &= 1 - \Phi\left(\frac{1740 - 21 \cdot 81}{3.5\sqrt{21}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{39}{3.5\sqrt{21}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.431571) \\ &= 0.00751676. \end{aligned}$$

10) Vi använder postfacksprincipen: För varje student räknas antal venner inom gruppen. Dessa 20 tal representerar de 20 brev. Antallet venner är något tal från 0 till 19, detta representerar de 20 postfack. Tyvärr ger detta inte färra postfack än brev! Detta går dock att fixa:

Fall 1: Om alla studenter har någon ven inom gruppen förekommer venantallet 0 inte. Alltså används postfack "0" inte. Vi har då 20 brev och 19 postfack.

Fall 2: Om någon student inte har några venner då finns ingen student som är venner med alla. Dvs. om postfacket 0 inte är tomt, då är postfacket 19 tomt. Dvs. vi kan ignorera detta postfack och vi har igen 20 brev och 19 postfack.

I båda fall måste de finnas ett postfack med minst två brev. Sagt annorlunda, det måste finnas minst två studenter som har samma antal venner.