

1. a) $|A \times B| = 6 \cdot 6 = 36$ element och 2^{36} delmängder,

b) Antalet udda tal =3, antalet vokaler =2, antalet element med bara jämna tal eller bara konsonanter blir $36 - |udda \text{ tal} \times \text{vokaler}| = 36 - 6 = 30$.

Då är antalet delmängder 2^{30} .

Alt:

$|jämna \text{ tal} \times \text{alla bokstäver} \text{ eller } \text{alla tal} \times \text{konsonanter}| = |jämna \text{ tal} \times \text{alla bokstäver}| + |jämna \text{ tal} \times \text{konsonanter}| - |jämna \text{ tal} \times \text{konsonanter}| = 18 + 24 - 12 = 30$

2. a) $P(\xi = 3) = 0.0867$

b) $\xi \in \text{Bin}\left(10, \frac{2}{3}\right)$, $P(\xi \geq 9) = P(\xi = 9) + P(\xi = 10) = 0.10405$

3. a) $S(15, 3) = 2375101$.

b) Om det står att "ingen skål ska vara tom" så blir lösningen $S(15, 3) \cdot 3! = 14250606$,

c) Antalet sätt är $\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{6} \cdot \binom{4}{4} = 3003 \cdot 210 \cdot 1 = 630630$.

4. a)

x	0	1	3	10
$P(\xi = x)$	0.5	0.25	0.125	0.125

b) $E(\xi) = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.125 + 10 \cdot 0.125 = 1.875$ \$

Han spelar 100 gånger och satsar 100\$ så vinsten kan bli

$$100 \cdot E(\xi) - 100 = 187.5 - 100 = 87.5 \text{ $}$$

5. Vi formaliserar satsen: $f = \text{jag är frisk}$, $r = \text{jag är rik}$ och $l = \text{jag är lycklig}$.

Vi får

$$(f \vee r) \rightarrow l$$

$$\neg l \wedge r$$

$$\therefore \neg f$$

Satsen kan skrivas som $((f \vee r) \rightarrow l) \wedge (\neg l \wedge r) \rightarrow \neg f$.

Man kan visa att argumentet är giltigt med hjälp av sanningsvärdestabell.

Om man får att det är en tautologi så är argumentet giltigt.

Vi inför betäckningar: $A = (f \vee r) \rightarrow l$, $B = \neg l \wedge r$

f	r	l	$\neg f$	$f \vee r$	A	$\neg l$	B	$A \wedge B$	$A \wedge B \rightarrow \neg f$
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0	0	0	1

Slutsats: Logiska argumentet är giltigt.

6. A = maskin A, $P(A) = 0,45$, B = maskin B, $P(B) = 0,055$, D = defekt.

Sannolikheten att man får ett element med defekt från maskinen A är

$$P(D|A) = 0,03 \text{ resp. } P(D|B) = 0,04.$$

Sannolikheten att ett defekt byggelement kommer från maskinen A är

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D|A)}{P(D)}$$

Sannolikheten att byggelementet är defekt blir

$$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) = 0,03 \cdot 0,45 + 0,04 \cdot 0,55 = 0,0355$$

$$P(A|D) = \frac{P(A) \cdot P(D|A)}{P(D)} = \frac{0,45 \cdot 0,03}{0,0355} = 0,38$$

7. a) Antalet sätt att välja tre **olika** bokstäver är $29 \cdot 28 \cdot 27$ och antalet sätt att välja två siffror är

Fall 1: $10 \cdot 10$, om vi tillåter likadana siffror. Då finns det 2192400 olika lösenord.

Fall 2: $10 \cdot 9$, om siffrorna är olika. Antalet lösenord blir 1973160.

b) Vi löser $a_n = a_{n-1} + 5$, $a_1 = 3$ med **backtrackingmetoden**:

$$a_n = a_{n-1} + 5 = (a_{n-2} + 5) + 5 = a_{n-2} + 2 \cdot 5 = (a_{n-3} + 5) + 2 \cdot 5 = a_{n-3} + 3 \cdot 5 = \dots = a_{n-k} + k \cdot 5$$

Vi använder att $a_1 = 3$ och sätter $n - k = 1 \Leftrightarrow k = n - 1$. Vi får

$$a_n = a_{n-k} + k \cdot 5 = a_1 + (n-1) \cdot 5 = 3 + 5n - 5 = 5n - 2. \text{ D v s } a_n = 5n - 2, n \geq 1.$$

8. För att bestämma frekvensfunktionen använder vi att $f(x) = F'(x)$.

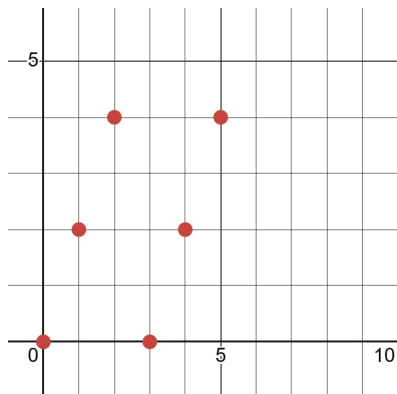
$$\text{Vi får } f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{5}{8} - \frac{x}{8}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Använd att $E(2\xi - 1) = 2E(\xi) - 1$. Vi bestämmer $E(\xi)$

$$E(\xi) = \int_0^2 x \cdot f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \left(\frac{5}{8} - \frac{x}{8} \right) dx = \frac{1}{8} \int_0^2 (5x - x^2) dx = \frac{1}{8} \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{11}{12} = 0,92.$$

$$E(2\xi - 1) = 2E(\xi) - 1 = 2 \cdot \frac{11}{12} - 1 = \frac{11}{6} - 1 = \frac{5}{6} = 0,83$$

9. Funktionen $f = 2x$ i $f: Z_6 \rightarrow Z_6$ där $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

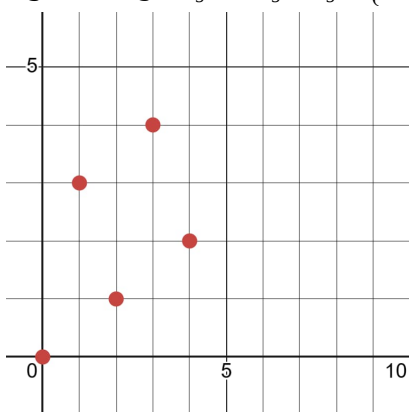


f är inte injektiv, ty t.ex. $f(2) = 4$ och $f(5) = 10 = 6 \cdot 1 + 4 \equiv 4$.

Vi ser att olika x-värden har samma y-värden. f är inte surjektiv, för att

$Ran(f) = \{0, 2, 4\} \neq Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (kodomän).

$g = 3x$ i $g: Z_5 \rightarrow Z_5$, $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$



g är injektiv, ty till olika x-värden hör olika y-värden ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

Vi ser att g är surjektiv, för att $Ran(g) = \{0, 1, 2, 3, 4\} = Z_5$ (kodomän)

10. ξ = bokens tjocklek (cm). $E(\xi) = 15\text{mm} = 1.5\text{cm}$. $D(\xi) = \sqrt{V(\xi)} = 0.5\text{ cm}$.

Stokastiska variabeln $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_{52}$ har $\mu = E(\eta) = 52 \cdot 1.5 = 78$ och

$$\sigma = \sqrt{V(\eta)} = \sqrt{52 \cdot 0.5^2} = 0.5 \cdot \sqrt{52}.$$

Sannolikheten att alla böcker får plats på ett hyllplan, som är 80 cm brett, är

$$P(\eta \leq 80) = \Phi\left(\frac{80 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{80 - 78}{0.5 \cdot \sqrt{52}}\right) = \Phi(0.554) = 0.70884.$$

SLUT!