Matematisk statistik
Matematikcentrum
Lunds universitet

Tentamen: 2022–04–20 kl 08^{00}–13^{00}
FMS F30 och FMS F32
Matematisk statistik

- Hjälpmedel: Miniräknare och utdelad formelsamling
- Lösningar ska vara försedda med **ordentliga motiveringar** och svaren förenklas maximalt
- Skriv anonymkod (eller namn om du saknar kod) på varje papper
- På omslaget måste du skriva med bläck
- Skriv endast på ena sidan av pappret

---

1. a) Antag att $\xi \in N(\mu, \sigma)$. Beräkna $P(\mu - 2\sigma \le \xi \le \mu + 2\sigma)$. (0.4)

b) Antag att $Y = 5\xi - 3\eta$, där ξ och η är oberoende stokastiska variabler. Vidare gäller att $E(\xi) = 1$, $E(\eta) = 2$, $V(\xi) = 1.5$, $V(\eta) = 0.5$. Beräkna $E(Y)$ samt $V(Y)$. (0.3)

c) Vid en speciell olycksdrabbad korsning har man kommit fram till att tiden mellan två konsekutiva (dvs, efterföljande) trafikolyckor är exponentialfördelad med väntevärde 6 månader. Antag att en olycka har inträffat vid korsningen just nu. Vad är då sannolikheten att nästa trafikolycka vid korsningen sker innan 12 månader har passerat? (0.3)

2. Tidslängden av en åktur med ”berg-och-dalbana” på Tivoli har visat sig vara en stokastisk variabel. Denna stokastiska variabel kan beskrivas som $\eta = 5 + \xi$ minuter, där ξ har täthetsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} (10 - x)/50, & 0 \le x \le 10 \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

a) Bestäm väntevärde och standardavvikelse för η och ξ. (0.4)

b) Tag fram fördelningsfunktionen för ξ. (0.3)

c) Beräkna sannolikheten att en åktur varar längre än 7 minuter. (0.3)

3. Tre olika mätinstrument, numrerade I, II, III, fungerar med sannolikheterna 0.3, 0.7 respektive 0.8. Man väljer slumpmässigt ut ett instrument.

a) Hur stor är sannolikheten att det valda instrumentet fungerar? (0.4)

b) Antag att det instrument man valde visade sig fungera. Beräkna den betingade sannolikheten att man har valt instrument II. (0.4)

c) Antag att två händelser A och B har sannolikheter skilda från noll, samt att A och B är disjunkta. Kan A och B vara oberoende? (0.2)

4. Antag att du vinner i ett visst spel med sannolikheten p. Händelserna att du vinner i olika spelomgångar är oberoende.

a) Vad är sannolikheten (uttryckt i p) att du vinner åtminstone en gång i 10 spelomgångar? (0.6)

b) Antag att sannolikheten p ovan är 0.01. Hur många gånger måste du minst spela för att sannolikheten att du vinner minst en gång ska vara minst 0.95? (0.4)

Var god vänd!

5. Strömmarna i farvattnen kring Bimini Lagoon, Bahamas, kan vara ganska komplicerade vilket gör att vattenmassorna kring öarna kan uppvisa olika karakteristiska bland annat beträffande temperatur, syrgashalt och salinitet. Saliniteten (%) i två olika vattenmassor kring Bimini Lagoon undersöktes. Från varje vattenmassa samlades det in flera oberoende observationer. Observationerna är redovisade i efterföljande tabell. Lämpliga normalfördelningsantaganden får göras vid behov, men ska redovisas!

Vattenmassa 1	3.809	3.560	3.751	3.846	3.768	3.924	3.737	3.568	3.677
Vattenmassa 2	3.926	3.698	4.070	3.309	4.148	3.955	3.965	4.203	

Avgör med ett lämpligt test om medelhalten av saliniteten i de olika vattenmassorna är signifikant skilda åt. Nollhypotes och mothypotes ska vara formulerade med hjälp av parametrarna i modellen. (1.0)

6. Två fysiker, Albert och Herbert, ska mäta en fysikalisk konstant K. De gör en mätning var men mäter med olika precision. Båda använder väntevärdesriktiga metoder. Låt ξ_1 och ξ_2 beteckna mätvärdet från Albert respektive Herbert. De stokastiska variablerna ξ_1 och ξ_2 kan antas oberoende med $E(\xi_1) = E(\xi_2) = K$, och $V(\xi_1) = \sigma_1^2$ samt $V(\xi_2) = \sigma_2^2$. Som uppskattning av K tänker fysikerna använda en linjärkombination av ξ_1 och ξ_2, nämligen

$$\eta = c \cdot \xi_1 + (1 - c) \cdot \xi_2,$$

där c är en konstant.

a) Beräkna $E(\eta)$ och kommentera resultatet (är resultatet önskvärt eller inte?). (0.2)

b) Bestäm c sådant att $V(\eta)$ minimeras. (0.6)

c) Visa att om $\sigma_1 = \sigma_2$, så är just *medelvärdet* den skattning som har minst standardavvikelse av alla linjära funktioner η. (0.2)

SLUT!