1)

a) Möjliga värden på ξ är : $\Omega = \{2,3,4\}$.

$$P(\xi=2) = \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{3}{3}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

(s/h att två av två på måfå dragna enheter är defekta).

Vidare gäller:

$$P(\xi=3) = \frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} + \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{10}+\frac{2}{10} = \frac{3}{10}$$

(s/h för att antingen är 3 av 3 dragna hela, eller så av 2 dragna är en hel och en trasig och detta följs av en trasig).

Till sist:

$$P(\xi=4) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}$$

(s/h att av 3 dragna är 1 defekt och 2 hela. Vid nästkommande 4:e drag har man alltså antingen fått två defekta eller tre hela.)

Kontroll : $P(\xi=2)+P(\xi=3)+P(\xi=4)$

$$= \frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{6}{10} = 1 \quad \text{Ok!}$$

1b)

$$E(\xi) = \sum_x x \cdot P(\xi = x) = 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{6}{10}$$

$$= \frac{7}{2} = \underline{\underline{3.5}}$$

$$E(\xi^2) = \sum_x x^2 P(\xi = x) = 2^2 \cdot \frac{1}{10} + 3^2 \cdot \frac{3}{10} + 4^2 \cdot \frac{6}{10}$$

$$= \frac{127}{10} = 12{,}7$$

Dus:

$$V(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = 12{,}7 - 3{,}5^2 = 0{,}45$$

$$\Rightarrow D(\xi) = \sqrt{V(\xi)} = \sqrt{0.45} \approx \underline{\underline{0{,}67}}.$$

2)

a) Fördelningsfunktionen blir:

$$F(x) = P(\xi \le x) = 1 - P(\xi > x) = 1 - e^{-(\lambda x)^\beta}$$

Täthetsfunktionen:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = 0 - e^{-(\lambda x)^\beta} \cdot (-\lambda^\beta \cdot \beta \cdot x^{\beta-1})$$

$$= \underline{\underline{\lambda^\beta \cdot \beta \cdot x^{\beta-1} \cdot e^{-(\lambda x)^\beta}}}$$

b) $P(2 \le \xi \le 3) = F(3) - F(2)$

$$= 1 - e^{-(3\lambda)^\beta} - (1 - e^{-(2\lambda)^\beta})$$

$$= e^{-(2\lambda)^\beta} - e^{-(3\lambda)^\beta}$$

c) Antag $\lambda = 2$ och $\beta = 1$ $\Rightarrow F(x) = 1 - e^{-2 \cdot x}$

Dvs, ξ är i detta fall exponentialfördelad med parameter $\lambda = 2$

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(\xi < E(\xi)) = F(E(\xi)) = 1 - e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = 1 - e^{-1}$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}63}}$$

3) Sätt M = man , K = kvinna

A = studenten är aktiv i studentförening

a) Satsen om total sannolikhet ger:

$$P(A) = P(A|K)\cdot P(K) + P(A|M)\cdot P(M)$$

$$= \frac{111}{212}\cdot\frac{49}{111} + \frac{101}{212}\cdot\frac{40}{101} = \frac{89}{212} \approx 0,42$$

b) $$P(M|A) = \frac{P(A|M)\cdot P(M)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{101}{212}\cdot\frac{40}{101}}{\frac{89}{212}} = \frac{40}{89} \approx 0,45$$

4)

Sätt: ξ = antalet dagar till inflyttning

$$E(\xi) = 150 + 130 + 270 = 550$$

$$V(\xi) = 15^2 + 10^2 + 25^2 = 950$$

$$D(\xi) = \sqrt{V(\xi)} = \sqrt{950}$$

Eftersom ξ är en summa av tre oberoende normalfördelade s.v. så är även ξ normalfördelad, dvs, $\xi \in N(550, \sqrt{950})$

Vi söker det x som uppfyller:

$$P(\xi \leq x) = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{x-550}{\sqrt{950}}\right) = 0{,}95$$

Dvs, x måste uppfylla:

kvantil

$$\frac{x-550}{\sqrt{950}} = 1{,}6449 = \lambda_{0{,}05}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = 550 + \sqrt{950} \cdot 1{,}6449$$

$$= 600{,}67$$

Dvs, minsta antalet dagar är 601, givet modellen i uppgiften.

5] $x_1, \ldots, x_7$ är slumpmässigt stickprov från $N(\mu_1, \sigma)$ och $y_1, \ldots, y_7$ är slumpmässigt stickprov från $N(\mu_2, \sigma)$. (ej stickprov i par.)

a) Bilda 99% konf. intervall för $\mu_1 - \mu_2$:

$$\bar{x} \approx 70{,}57 \quad , \quad \bar{y} \approx 70{,}14$$

$$S_x \approx 0{,}2430 \quad , \quad S_y = 0{,}2370 \quad , \quad S_{pooled} \approx 0{,}240$$

$$\Rightarrow \quad I_{\mu_1 - \mu_2} = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{0,05}(12) \cdot s_{pooled} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{7}}$$

$$\approx 0{,}43 \pm 0{,}391 \approx [0{,}038, \, 0{,}82]$$

b) Med konfidensgrad 99% är det statistiskt säkerställt att A är en effektivare luftfuktare. Den förväntade skillnaden i prestation befinner sig inom konf. intervallet i a).

6) Okänd varians ger ett t-test.

a) $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$ $\qquad n = 10$

$H_0: \mu = 68$ $\qquad \bar{x} = 69{,}15$, $s^2 = 7{,}74055$

$H_1: \mu \neq 68$ $\qquad t_{9,\,0{,}025} = 2{,}262$

Testvariabel: $T_{obs} = \dfrac{\bar{x} - 68}{s/\sqrt{n}} = 1{,}3071$

Eftersom $-2{,}262 < T_{obs} < 2{,}262$, så kan H_0 ej förkastas.

b) Vi vet $\xi_i \in N(69, 3) \Rightarrow \bar{\xi} \in N(69, \frac{3}{\sqrt{10}})$

Styrka = P(H_0 förkastas givet att $\mu = 69$ är det rätta värdet)

$$= P\left(\left| \frac{\bar{\xi} - 68}{3/\sqrt{10}} \right| > \lambda_{0{,}025} \right)$$

$$= 1 - P\left(-\lambda_{0{,}025} < \frac{\bar{\xi} - 68}{3/\sqrt{10}} < \lambda_{0{,}025} \right)$$

$$= 1 - P\left(-\lambda_{0{,}025} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + 68 < \bar{\xi} < \lambda_{0{,}025} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + 68 \right)$$

$$= 1 - P\left(-\lambda_{0{,}025} - \frac{1}{3/\sqrt{10}} < \frac{\bar{\xi} - 69}{3/\sqrt{10}} < \lambda_{0{,}025} - \frac{1}{3/\sqrt{10}} \right)$$

$$= 1 - \left(\Phi\left(\lambda_{0{,}025} - \frac{1}{3/\sqrt{10}} \right) - \Phi\left(-\lambda_{0{,}025} - \frac{1}{3/\sqrt{10}} \right) \right)$$

$$= 1 - \Phi(0{,}9059) + \Phi(-3{,}0141)$$

$$\approx 0{,}1838$$

(Obs. $\lambda_{0{,}025} = 1{,}96$)