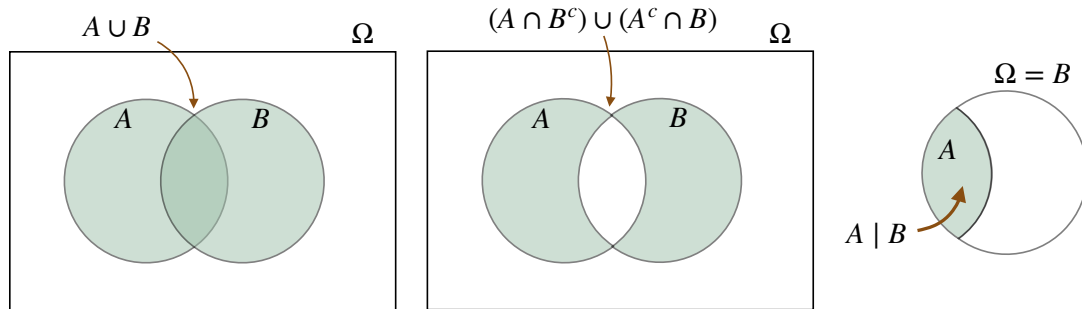


Lösningssförslag

1. (a) Vi får händelserna i) $A \cup B$, ii) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ samt $A \mid B$. Dessa kan illustreras i Venndiagram som: (0.6)



- (b) Den betingade sannolikheten blir, ty A och B oberoende (0.4)

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) = 0.1$$

2. (a) Vi har ett antal utfall $\omega = \{ \text{tidsåtgång} \}$ med okänd fördelning. Vi definierar händelsen $D = \{ \omega > 40 \}$. I vårt utfallsrum har vi då händelsen D och dess komplement D^c , för vilka vi enligt tabell har 4 och 16 observationer av respektive utfall. Som skattning av $P(D)$ använder vi den klassiska sannolikhetsdefinitionen, dvs vi får (0.4)

$$p = P(D) = \frac{\text{antal gynsamma utfall}}{\text{totalt antal utfall}} = \frac{4}{4 + 16} = 0.2.$$

- (b) Om vi låter D_i vara händelsen att tidsåtgång i är längre än 40 sekunder, får vi $\xi = \sum_{i=1}^5 1_{D_i}$. Eftersom vi vet att D_i och D_j är likafördelade med $P(D_i) = 0.2, \forall i$, samt oberoende för $i \neq j$ blir då ξ Binomialfördelad. Mer specifikt får vi $\xi \in \text{Bin}(0.2, 5)$. Sannolikheten för $\{D_1^c \cap \dots \cap D_5^c\}$ blir därför $P(\xi = 0) = \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 = 0.33$. (0.6)

3. (a) Vi har sannolikheterna givna för utfallen $x = 1, 2, 3$, samt ur texten att $P(\xi > 3) = 0$. Vi får då $P(\xi = 0) = 1 - \sum_{x=1}^3 P(\xi = x) = 1 - 0.4 - 0.3 - 0.1 = 0.2$. (0.2)

- (b) Vi använder definitionen för väntevärde och varians och får (0.2)

$$E(\xi) = \sum_{x=0}^3 x P(\xi = x) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 = 1.3$$

$$\begin{aligned} V(\xi) &= E(\xi^2) - E(\xi)^2 = \sum_{x=0}^3 x^2 P(\xi = x) - E(\xi)^2 \\ &= 0^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.1 - 1.3^2 = 0.81 \end{aligned}$$

$$D(\xi) = \sqrt{V(\xi)} = 0.9$$

- (c) Den totala mjölkhandeln på tisdagar är $\nu = \sum_{i=1}^{400} \xi_i$ där det är givet att kundernas mjölkinköp är likafördelade och oberoende. Det ger att (0.2)

$$E(\nu) = E\left(\sum_{i=1}^{400} \xi\right) = \sum_{i=1}^{400} E(\xi) = 400 E(\xi) = 400 \cdot 1.3 = 520$$

$$D(\nu) = \sqrt{V\left(\sum_{i=1}^{400} \xi\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{400} V(\xi)} = \sqrt{400 V(\xi)} = 20 \cdot D(\xi) = 20 \cdot 0.9 = 18.$$

- (d) Eftersom vi summerar över ett stort antal slumpvariabler som är oberoende och likafördelade kan vi använda Centrala gränsvärdessatsen, varför vi har approximativt att $\nu \in N(520, 18)$ (från (c)). Vi söker då den mängd mjölk där sannolikheten att få denna observation eller större är högst 5 %, dvs kvantilen $x_{0.05}$ som uppfyller (0.4)

$$P(\xi < x_{0.05}) = 0.05 \Rightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{x_{0.05} - 520}{18}\right) = 0.05 \Rightarrow$$

$$\frac{x_{0.05} - 520}{18} = \lambda_{0.05} = [tabell] = 1.64 \Rightarrow$$

$$x_{0.05} = 520 + 18 \cdot 1.64 = 549.52 = 550.$$

4. Eftersom hastigheterna vid övergångsställena A och B kan grupperas per bil kan vi använda modellen *stickprov i par*. Alltså antar vi följande modell för skillnaden $B - A$ är $\eta_i - \xi_i \triangleq \zeta_i \in N(\Delta, \sigma)$ för de n observationerna, $i = 1, \dots, 8$.

De observerade skillnaderna fås som $z_i = y_i - x_i$ och skattningarna $\Delta_{obs}^* = \bar{z} = 6.38$ och $\sigma_{obs}^* = s = 7.13$.

Om vi ska undersöka om hastigheterna är högre vid B än A vill vi undersöka om Δ är positiv. Alltså vill vi bilda ett ensidigt neråt begränsat konfidensintervall med $\alpha = 0.01$. Eftersom standardavvikelsen är skattad använder vi en t -kvantil med $8 - 1 = 7$ frihetsgrader, vilket ur tabell avläses som $t_{0.01}(7) = 3.00$. Vi får då intervallet

$$I_{\Delta} = \left[\bar{z} - t_{0.01}(7) \frac{s}{\sqrt{n}}, \infty \right) = [-1.18, \infty)$$

Vi kan alltså inte påstå att det körs snabbare vid övergångsställe B än A på signifikansnivån 0.01. (1.0)

5. (a) Eftersom vi har fördelningsfunktionen $F(x)$ kan vi beräkna sannolikheten direkt som (0.4)

$$P(\xi > \sqrt{2}) = 1 - P(\xi \leq \sqrt{2}) = 1 - F(\sqrt{2})$$

$$= 1 - (1 - e^{-(\sqrt{2})^2/2}) = 1/e = 0.37.$$

- (b) Vi får täthetsfunktionen genom att derivera fördelningsfunktionen m.a.p. x ,

$$f(x) = F'(x) = \left(-\frac{2x}{2}\right)(-e^{-x^2/2}) = xe^{-x^2/2}, \quad x \geq 0$$

och $f(x) = 0$ då $x < 0$. Denna är en täthetsfunktion om den uppfyller två kriterier, nämligen 1) $f(x) \geq 0$, $\forall x$, samt 2) att $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Vi kan direkt se att det första

kriteriet är uppfyllt. Vad gäller det andra kriteriet skulle vi kunna beräkna integralen, men eftersom denna är ekvivalent med att beräkna gränsvärdet $F(x)$ då $x \rightarrow \infty$ gör vi istället detta. Vi får då

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 - e^{-x^2/2} = 1 - 0 = 1.$$

Alltså är den ovan beräknade $f(x)$ en täthetsfunktion. (0.6)

6. (a) Vi har ur uppgiften att ξ = mätt askhalt i stenkol (%-enheter) följer $N(\mu, 1)$, där μ är den faktiska men okända askhalten. Stickprovet består av $\xi_1, \dots, \xi_{12}$ som är oberoende och likafördelade som ξ . Vi kan då formulera hypoteserna: (0.2)

$$H_0 : \mu = 8 (= \mu_0)$$

$$H_1 : \mu > 8$$

- (b) Med *Teststorhet* beräknar vi

$$T_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{1/\sqrt{n}} = \frac{8.4 - 8}{1/(2\sqrt{3})} = 0.4 \cdot 2\sqrt{3} = 1.39.$$

Vi jämför denna med $\lambda_{0.05} = 1.64$ och finner att $T_{obs} \not> \lambda_{0.05}$. Alltså kan vi inte förkasta nollhypotesen: Den uppmätta halten är inte signifikant högre än 8 %. (0.4)

- (c) Vi beräknar testets *styrka*, alltså sannolikheten att förkasta nollhypotesen givet att den sanna askhalten är $\mu = 9$ (%). Vi får

$$\begin{aligned} P(T > \lambda_{0.05} \mid \mu = 9) &= P\left(\frac{\mu^* - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \lambda_{0.05} \mid \mu = 9\right) \\ &= P\left(\mu^* > \mu_0 + \lambda_{0.05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu = 9\right) \\ &= P\left(\frac{\mu^* - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 + \lambda_{0.05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = 9\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 + \lambda_{0.05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = 9\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{8 + 1.64 \frac{1}{\sqrt{12}} - 9}{1/\sqrt{12}}\right) \\ &= 1 - \Phi(-1.81) = \Phi(1.81) = 0.97. \end{aligned}$$

Detta är således ett starkt = bra test och vi behöver inte göra fler än 12 mätningar vid nästa tillfälle. Om askhalten verkligen vore 9 % hade vårt test förkastat nollhypotesen med hög sannolikhet. (0.4)

Slut!