1) a) $\xi \in Po(3)$.

$$P(\text{minst 3 fel}) = P(\xi \geq 3) = 1 - \left(P(\xi=0) + P(\xi=1) + P(\xi=2)\right)$$
$$= 1 - e^{-3} \cdot \left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!}\right)$$
$$\approx \underline{\underline{0,5768}}$$

b) $E(\xi) = 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,5 = 3.3$

$$V(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2$$
$$= 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,5 - 3.3^2$$
$$= 0,61$$
$$\Rightarrow \text{stdavv} = D(\xi) = \sqrt{V(\xi)} \approx \underline{\underline{0,78}}.$$

c) Använd Gauss approximationsformel:

Sätt $g(\eta) = \eta^3$. Ger att $g'(\eta) = 3\eta^2$

Vet att $\mu = E(\eta) = 0,5$, $\sigma^2 = V(\eta) = 0,1$

Gauss approx. formel ger:

$$V(g(\eta)) \approx (g'(\mu))^2 \cdot \sigma^2 = (3 \cdot 0,5^2)^2 \cdot 0,1 = \underline{\underline{0,0563}}.$$

2) Låt ξ_i = livslängden för del i ; $i = A, B$.

Här är $\xi_i \in Exp(1/2)$, dvs, $\lambda = 1/2$.

$$P(\xi_i > 3) = 1 - P(\xi_i \leq 3) = 1 - \int_0^3 \frac{1}{2} e^{-x/2}\, dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^{-x/2}}{-1/2} \right]_0^3 = 1 + \left[e^{-x/2} \right]_0^3$$

$$= 1 + e^{-3/2} - 1 = e^{-3/2} \approx 0{,}2231$$

P(minst en av delarna fungerar)

$$= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{= P(A) \cdot P(B) \text{ ty oberoende.}}$$

$$= \left\{ P(A) = P(B) = 0{,}2231 \right\}$$

$$= 2 \cdot 0{,}2231 - 0{,}2231^2 = \underline{\underline{0{,}3965}}$$

3) $\begin{cases} \xi_i \in N(75,8) \ ; \ i=1,\dots,n_1 & \text{alla } \xi_i \text{ ober.} \\ \eta_i \in N(70,12) \ ; \ i=1,\dots,n_2 & \text{alla } \eta_i \text{ ober.} \end{cases}$

Sätt $\bar{\xi} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} \xi_i$ och $\bar{\eta} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} \eta_i$

Då gäller att (då $n_1 = 16$ och $n_2 = 9$):

$$\bar{\xi} \in \underbrace{N\left(75, \frac{8}{\sqrt{16}}\right)}_{N(75,2)} \ ; \ \bar{\eta} \in \underbrace{N\left(70, \frac{12}{\sqrt{9}}\right)}_{N(70,4)}$$

Vidare gäller att:

$$\bar{\xi} - \bar{\eta} \in \underbrace{N\left(75-70, \sqrt{2^2+4^2}\right)}_{N(5,\sqrt{20})}$$

a) $P(\bar{\xi}-\bar{\eta} > 4) = 1 - P(\bar{\xi}-\bar{\eta} \le 4) = 1 - \Phi\left(\frac{4-5}{\sqrt{20}}\right)$

$= 1 - \underbrace{\Phi(-0,2236)}_{= 1-\Phi(0,2236)} = \underline{\underline{0,5885}}.$

b) $P(3,5 < \bar{\xi}-\bar{\eta} < 5,5) = P(\bar{\xi}-\bar{\eta} < 5,5) - P(\bar{\xi}-\bar{\eta} < 3,5)$

$= \Phi\left(\frac{5,5-5}{\sqrt{20}}\right) - \Phi\left(\frac{3,5-5}{\sqrt{20}}\right) = \Phi(0,1118) - \Phi(-0,3354)$

$= \Phi(0,1118) - (1-\Phi(0,3354)) = \underline{\underline{0,1758}}$

4) Det antas att mätvärdena kommer från en variabel $\xi \in N(\mu, \sigma)$

Hypoteser: $\begin{cases} H_0 : \mu = 48 = \mu_0 \\ H_1 : \mu > 48 \end{cases}$

$\bar{x} = 49{,}3375$, $n = 8$.

Skattad stdavv: $s = \sqrt{\frac{1}{8-1} \sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^2}$

$= 1{,}4182$

Testvariabel: $T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{49{,}3375 - 48}{\frac{1{,}4182}{\sqrt{8}}}$

$= 2{,}6675.$

Jämför T-variabelns värde med t-kvantilen.

Eftersom $T > \underbrace{t_{0{,}05}(8-1)}_{= 1{,}8946}$ så kan vi förkasta H_0, dvs, stållegeringen B har signifikant högre draghållfasthet.

5)

a) Hypoteser: $\begin{cases} H_0: m_1 = 0{,}08 = m_0 \\ H_1: m_1 < 0{,}08 \end{cases}$

* Antag signifikansnivå $\alpha = 0{,}05$.
* σ är känd, $\sigma = 0{,}01$.

Testvariabel: $T = \dfrac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{0{,}0705 - 0{,}08}{\frac{0{,}01}{\sqrt{4}}} = -1{,}9$

Eftersom $T < -\lambda_\alpha = -1{,}64$, så kan H_0 förkastas. Dvs, As-koncentrationen i brunn A ligger signifikant under gränsen.

b) I detta fall har vi två oberoende stickprov. Följande gäller:

$$\bar{\xi} - \bar{\eta} \in N\left(m_1 - m_2, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}\right); \quad \begin{matrix} n_1 = 4 \\ n_2 = 5 \end{matrix}$$

Dvs, vi får konfidensintervallet:

$$\bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$0{,}0026 \pm \underbrace{\lambda_{0{,}025}}_{=1{,}96} \cdot 0{,}0067$$

$$\Rightarrow$$

$$(-0{,}011,\ 0{,}016)$$

Eftersom konf.intervallet innehåller noll kan vi ej förkasta H_0.

6) Sätt ξ_i = bidraget från medlem i ; $i=1,\ldots,1000$.

Från uppgiftsformuleringen framgår:

$$P(\xi_i=0)=0{,}2 \quad , \quad P(\xi_i=50)=P(\xi_i=100)=\frac{0{,}8}{2}=0{,}4$$

Förväntat bidrag från medlem i:

$$E(\xi_i)=50\cdot P(\xi_i=50)+100\cdot P(\xi_i=100)$$
$$=50\cdot 0{,}4+100\cdot 0{,}4 = 60 \text{ kr.}$$

Variansen av ξ_i:

$$V(\xi_i)=E(\xi_i^2)-(E(\xi_i))^2=50^2\cdot 0{,}4+100^2\cdot 0{,}4-60^2=1400$$

$$\Rightarrow \text{Stdavv}=\sigma=\sqrt{V(\xi_i)}=\sqrt{1400}\approx 37{,}42 \text{ kr.}$$

Totalt belopp: $Y=\sum_{i=1}^{1000}\xi_i \;\tilde{\in}\; \underbrace{N(1000\cdot 60, \sqrt{1000\cdot 1400})}_{\approx N(60\,000,\, 1183{,}216)}$

enligt CGS.

Vad är sannolikheten att få in minst 58000 kr?

$$P(Y\geq 58\,000)=1-P(Y<58\,000)\approx 1-\Phi\left(\frac{58000-60000}{1183{,}216}\right)$$
$$=1-\Phi(-1{,}69)=1-(1-\Phi(1{,}69))$$
$$=\Phi(1{,}69)=\underline{\underline{0{,}95}}.$$

↑ tabell