1) a) $\xi \in N(\mu, \sigma)$

$$P(\mu - 2\sigma \le \xi \le \mu + 2\sigma) = P(\xi \le \mu + 2\sigma) - P(\xi \le \mu - 2\sigma)$$
$$= \Phi\left(\frac{\mu + 2\sigma - \cancel{\mu}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 2\sigma - \cancel{\mu}}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2)$$
$$= \Phi(2) - (1 - \Phi(2))$$
$$= 2\Phi(2) - 1$$
$$\approx 2 \cdot 0{,}9772 - 1$$
$$= 0{,}9544$$

b) $Y = 5\xi - 3\eta$; $E(\xi) = 1$, $E(\eta) = 2$
$V(\xi) = 1.5$, $V(\eta) = 0.5$

$$\begin{cases} E(Y) = 5E(\xi) - 3E(\eta) = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -1 \\ V(Y) = V(5 \cdot \xi - 3 \cdot \eta) = 5^2 \cdot V(\xi) + (-3)^2 \cdot V(\eta) \end{cases}$$
$$= 25 \cdot 1.5 + 9 \cdot 0{,}5 = 42$$

c) $\xi \in Exp\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ där $\frac{1}{\lambda} = 6$ mån. $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$ per mån.

$$P(\xi \le x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \ldots = 1 - e^{-\lambda x} \quad ; \; x \ge 0.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P(\xi \le 12)}} = 1 - e^{-\frac{1}{6} \cdot 12} = 1 - e^{-2} \approx \underline{\underline{86.5\,\%}}$$

2.) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{10-x}{50} & ; \ 0 \le x \le 10. \\ 0 & \text{övrigt} \end{cases}$

a) Notera att : $\begin{cases} E(\eta) = 5 + E(\xi) \\ V(\eta) = V(\xi) \end{cases}$

$$E(\xi) = \int_0^{10} x f(x)\,dx = \int_0^{10} x \cdot \frac{10-x}{50}\,dx = \frac{1}{50}\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= \frac{1}{50}\cdot\left(5\cdot 10^2 - \frac{10^3}{3}\right) = \frac{10}{3} \approx 3.33$$

$$V(\xi) = \int_0^{10} x^2 f(x)\,dx - (E(\xi))^2 = \int_0^{10} x^2 \cdot \frac{10-x}{50}\,dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{50}\cdot\left[10\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{50}{9} \approx 5{,}56$$

b) Fördelningsfunktionen $F(x)$ blir:

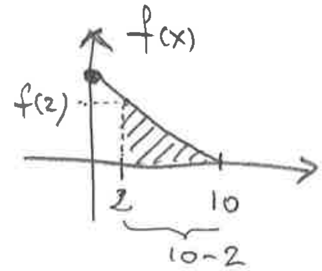
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \int_0^x \frac{10-t}{50}\,dt & , \ 0 \le x \le 10 \\ 1 & , \ x > 10 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{1}{50}\left(10x - \frac{x^2}{2}\right) & , \ 0 \le x \le 10 \\ 1 & , \ x > 10 \end{cases}$$

c) $\underline{P(\eta > 7)} = P(5 + \xi > 7) = P(\xi > 2)$

$$= \frac{(10-2)\cdot f(2)}{2} = \frac{(10-2)\cdot\frac{(10-2)}{50}}{2}$$

$$= \frac{8^2}{100} = \underline{0{,}64}$$



3.) Definiera händelsen F:

a) F = "det valda instrumentet fungerar".

$P(F|I) = 0{,}3$, $P(F|II) = 0{,}7$, $P(F|III) = 0{,}8$

$$P(F) = P(F|I)\cdot P(I) + P(F|II)\cdot P(II) + P(F|III)\cdot P(III)$$
$$= 0.3\cdot\frac{1}{3} + 0{,}7\cdot\frac{1}{3} + 0{,}8\cdot\frac{1}{3} = 0{,}6$$

b) $$P(II|F) = \frac{P(F|II)\cdot P(II)}{P(F)} = \frac{0{,}7\cdot\frac{1}{3}}{0{,}6} \simeq 0{,}3889$$

c) Enligt uppgift gäller att: $P(A) > 0$, $P(B) > 0$.

Antag att A och B är disjunkta, dvs,

$$P(A\cap B) = 0.$$

Men, om A och B ska vara oberoende måste följande gälla:

$$P(A\cap B) = \underbrace{P(A)}_{>0}\cdot\underbrace{P(B)}_{>0} > 0$$

Alltså, A och B kan ej vara oberoende om A och B är disjunkta.

4) a) Alt 1:

$$P(\text{vinner minst en gång}) = 1 - P(\text{förlorar alla 10 ggr})$$
$$= 1 - \underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdots(1-p)}_{10 \text{ ggr}}$$
$$= 1-(1-p)^{10}.$$

Alt 2:

$$P(\text{vinner minst en gång}) = \sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$$
$$= \underbrace{\sum_{\boxed{k=0}}^{10} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}}_{=1} - \underbrace{\binom{10}{0}}_{=1} \cdot \underbrace{p^0}_{=1} \cdot (1-p)^{10}$$
$$= 1-(1-p)^{10}.$$

b) $p = 0{,}01$

$$1-(1-p)^n = 0{,}95$$
$$(1-p)^n = 0{,}05$$
$$\ln((1-p)^n) = \ln(0{,}05)$$
$$n = \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(1-p)} = \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}99)} = 298{,}07$$

Välj $\boxed{n = 299}$

5.) Antag: ξ_i = "salinitet i vattenmassa 1" $\in N(\mu_1, \sigma)$

$i = 1, \dots, n_1$ där $n_1 = 9$.

η_i = "salinitet i vattenmassa 2" $\in N(\mu_2, \sigma)$

$i = 1, \dots, n_2$ där $n_2 = 8$.

alla ξ_i antas ober. av alla η_i.

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

Sätt t.ex. $\alpha = 5\%$

$\mu^*_{1,obs} = 3{,}7378$; $\mu^*_{2,obs} = 3{,}9093$

$$s_1^2 = \frac{1}{9-1} \sum_{i=1}^{9} (x_i - \bar{x})^2 = 0{,}0146 = 0{,}1208^2$$

$$s_2^2 = \frac{1}{8-1} \sum_{i=1}^{8} (y_i - \bar{y})^2 = 0{,}0828 = 0{,}2877^2$$

Poolad - σ - skattning:

$$\sigma^*_{obs} = s_p = \sqrt{\frac{(9-1)\cdot s_1^2 + (8-1)\cdot s_2^2}{9-1+8-1}} = \sqrt{0{,}0464} = 0{,}2154$$

Betrakta skillnaden:

$$\mu_1^* - \mu_2^* \in N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{8}}\right)$$

Tvåsidigt konf. intervall:

$$\left(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(15) \cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{8}}\right) = (-0{,}1715 \pm 2{,}13 \cdot 0{,}1047)$$

$$= (-0{,}39, 0.05)$$

Eftersom 0 är inkluderat i konf. intervallet kan Ho ej förkastas. Det är alltså ingen signifikant skillnad i salinitet.

6.) Förutsättningar:

$$\eta = c \cdot \xi_1 + (1-c) \cdot \xi_2$$

där $E(\xi_1) = E(\xi_2) = K$. $\begin{cases} V(\xi_1) = \sigma_1^2 \\ V(\xi_2) = \sigma_2^2 \end{cases}$

a) $E(\eta) = c \cdot E(\xi_1) + (1-c) \cdot E(\xi_2)$

$= c \cdot K + (1-c) \cdot K$

$= \underline{\underline{K}}$.

Detta är bra! Betyder att skattningen η är väntevärdesriktig.

b) $V(\eta) = c^2 V(\xi_1) + (1-c)^2 V(\xi_2)$

$= c^2 \sigma_1^2 + (1-c)^2 \cdot \sigma_2^2$

$$\frac{\partial V(\eta)}{\partial c} = 2c \cdot \sigma_1^2 + 2(1-c) \cdot (-1) \cdot \sigma_2^2 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 2c\,\sigma_1^2 = 2 \cdot (1-c) \cdot \sigma_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2c \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = 2\sigma_2^2$

$\Leftrightarrow \quad c = \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Detta ger ett min-värde ty $\dfrac{\partial^2 V(\eta)}{\partial c^2} = 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 > 0$

c) Då $\sigma_1 = \sigma_2$ så blir $c = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_1^2} = \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \sigma_2^2} = \dfrac{1}{2}$

Dvs, $\eta = c \cdot \xi_1 + (1-c) \cdot \xi_2 = \dfrac{\xi_1 + \xi_2}{2}$ = "medelvärdet"