

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar och svaren förenklas maximalt. Alla baser och koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade, om inte annat anges.

1. Betrakta vektorerna $\mathbf{u} = (3, 1, 4)$ och $\mathbf{v} = (-4, 3, -1)$.
 - a) Låt ℓ_1 vara linjen genom punkten $O: (0, 0, 0)$ med riktningsvektor \mathbf{u} och låt ℓ_2 vara linjen genom punkten $P: (2, 5, 7)$ med riktningsvektor \mathbf{v} . Bestäm skärningen mellan linjerna. (0.3)
 - b) Bestäm alla vektorer med längd 1 som är ortogonala mot både \mathbf{u} och \mathbf{v} . (0.3)
 - c) Dela upp \mathbf{u} i två vinkelräta komponenter, där den ena är parallell med vektorn \mathbf{v} . (0.4)
2. a) Är vektorerna $\mathbf{u}_1 = (0, 1, 2, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -4, 3)$ linjärt oberoende? (0.4)
 - b) Bestäm minsta vinkeln mellan planen $\pi_1: x + y - 4z = 5$ och $\pi_2: y + z + 3 = 0$. (0.3)
 - c) Ligger punkten $(1, 1, 3)$ i planet $(x, y, z) = (s + t, 2 + 2s - 3t, 3 - 4s + 5t)$? (0.3)
3. a) Låt E och G vara matriser av storlek 6×3 respektive 2×4 . Vilken storlek ska matrisen F ha för att matrismultiplikationen EFG ska vara definierad och vilken storlek får i så fall matrisen EFG ? (0.2)
 - b) Lös matrisekvationen $XA = B + X$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (0.8)
4. Linjen ℓ_1 går genom punkterna $(1, 1, -1)$ och $(4, -3, 0)$ och linjen ℓ_2 har ekvationen $\ell_2: (x, y, z) = (3, -1 + 2t, -3 - t)$. Bestäm minsta avståndet mellan linjerna. (1.0)
5. a) För vilka värden på konstanten a är matrisen $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2a & 1 \end{pmatrix}$ inverterbar? Hur många lösningar har matrisekvationen $AX = Y$ för ett sådant a ? (0.5)
 - b) För ett visst värde på a finns ett högerled Y sådant att både $X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $X_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ är lösningar till systemet $AX = Y$. Bestäm samtliga lösningar till systemet för detta värde på a . (0.5)
6. Bestäm matrisen för den linjära avbildning som definieras av att man först speglar rummets vektorer i linjen med ekvationen $(x, y, z) = (2 - 2t, -2 + 2t, 1 - t)$ och därefter vrider dem vinkeln $\frac{\pi}{3}$ runt x -axeln i positiv led (sett från spetsen av x -axeln). (1.0)

SLUT!