

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar och svaren förenklas maximalt. Alla baser och koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade, om inte annat anges.

1. Punkterna $P: (-2, 0, 0)$, $Q: (0, 1, 1)$ och $R: (1, 2, 1)$ är givna.

a) Bestäm vinkeln i triangeln $\triangle PQR$ vid hörnet Q . (0.5)

b) Beräkna arean av triangeln. (0.5)

2. Vektorerna \mathbf{u} och \mathbf{v} i \mathbb{R}^3 uppfyllar $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ och $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \frac{2\pi}{3}$.

a) Beräkna $(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - 2\mathbf{v})$. (0.5)

b) Bestäm $\|(2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - 2\mathbf{v})\|$. (0.5)

3. Lös matrisekvationen $\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{C}$ där matriserna \mathbf{A} , \mathbf{B} och \mathbf{C} ges av

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.0)$$

4. För vilka värden på konstanten a saknar planen

$$\pi_1: x - ay - az = 1, \quad \pi_2: ax + y - z = a \quad \text{och} \quad \pi_3: -5ax + 5y + 11z = -10$$

gemensam skärning? (1.0)

5. a) Bestäm konstanterna a och b så att planen $\pi_a: ax + 4y + 7z = 3$ och $\pi_b: x - y + bz = 6$ blir parallella. (0.4)

b) Beräkna minsta avståndet mellan planen i detta fall. (0.6)

6. a) Den linjära avbildningen \mathbf{G} projicerar rummets vektorer ortogonalt på planet $3x + 2y + z = 0$. Bestäm avbildningsmatrisen för \mathbf{G} . (0.4)

b) Låt \mathbf{F} vara en linjär avbildning från \mathbb{R}^3 till \mathbb{R}^3 sådan att ekvationen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ bara har lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Bevisa att ekvationen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ är lösbar för varje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. (0.6)

SLUT!