

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar och svaren förenklas maximalt. Alla baser och koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade, om inte annat anges.

1. Vilka av följande matriser har en invers?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -1 & 1/2023 \end{pmatrix} \quad (0.2 \text{ poäng för varje})$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad (0.3 \text{ poäng för varje})$$

2. a) Bestäm ekvationen för linjen ℓ som går genom punkterna $(2, 1, 3)$ och $(3, 2, 6)$. (0.2)

b) Bestäm skärningen mellan ℓ och linjen $\ell': (x, y, z) = (-2 - t, 2 + t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$. (0.4)

c) Bestäm skärningen mellan ℓ och planet $\pi: 2x - 3y + z = 2$. (0.4)

3. a) Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna $(1, 1, 0)$, $(2, 3, -1)$ och $(4, 0, 1)$. (0.5)

b) Bestäm volymen av parallelepipeden som spänns upp av vektorerna $(1, 1, 0)$, $(2, 3, -1)$ och $(4, 0, 1)$. (0.5)

4. a) Ange en ekvation på affin form för planet

$$\pi_1: \begin{cases} x = 3 + s + 2t \\ y = 1 - s + t \\ z = 2 - s. \end{cases} \quad (0.3)$$

b) Ange en ekvation på parameterform för planet $\pi_2: 3x - 5y - z = 25$. (0.3)

c) Bestäm skärningen mellan π_1 och π_2 . (0.4)

5. Låt $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen med avbildningsmatris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & a & 4 \end{pmatrix}.$$

För vilka värden på a gäller det att $(2, 1, 5)$ ligger i värdemängden för \mathbf{F} ? (Ledning: Värdemängden för \mathbf{F} är mängden av de vektorerna \mathbf{y} så att det finns \mathbf{x} med $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$). (1.0)

6. Linjerna ℓ_1 och ℓ_2 har ekvationerna $\ell_1: (x, y, z) = (-2 + t, 1, 1 + t)$ och $\ell_2: (x, y, z) = (2, 2 + t, 1 + t)$. Bestäm den linje som skär båda ℓ_1 och ℓ_2 under rät vinkel. (1.0)

SLUT!