

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar och svaren förenklas maximalt. Alla baser och koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade, om inte annat anges.

1. Två linjer har ekvationerna

$$\ell_1: (x, y, z) = (0, 1, 3) + t(1, -1, -2) \quad \text{och} \quad \ell_2: (x, y, z) = (1 + 2t, -1 - t, -1 - 2t).$$

a) Linjerna skär varandra. Bestäm skärningspunkten. (0.3)

b) Ange en ekvation på normal form för planet som innehåller båda linjerna. (0.3)

c) Bestäm minsta vinkeln mellan ℓ_1 och planet $\pi: y + z = 5$. (0.4)

2. a) Lös matrisekvationen $\mathbf{AX} + \mathbf{C} = \mathbf{AXB}$ där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (0.5)$$

b) Är vektorerna $(1, 2, -1, -2, 4)$, $(6, 1, 5, 3, 2)$ och $(4, -3, 7, 7, -6)$ linjärt beroende? (0.5)

3. Betrakta punkterna $P_1: (-1, -1, 0)$, $P_2: (0, 4, 1)$, $P_3: (1, 0, -1)$ och $P_4: (1, -3, -2)$.

a) Ligger de 4 punkterna i samma plan? (0.5)

b) Beräkna minsta avståndet mellan punkten P_1 och linjen

$$\ell: (x, y, z) = (-2 + t, 1 + 5t, 3 + 7t). \quad (0.5)$$

4. Bestäm en positivt orienterad ortonormerad bas $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ så att \mathbf{u}_1 är ortogonal mot planet $x - y + z + 2023 = 0$ och \mathbf{u}_3 är ortogonal mot linjen $(x, y, z) = (34 + t, 37 + t, -45 + 3t)$. (1.0)

5. Den linjära avbildningen $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uppfyllar $\mathbf{F}(1, 1, 1) = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{F}(-1, 0, 3) = (-3, 3, -1)$ och $\mathbf{F}(2, 2, 1) = (2, -1, 1)$. Bevisa att kolonnerna i avbildningsmatrisen för \mathbf{F} utgör en bas för \mathbb{R}^3 och beräkna $\mathbf{F}^{-1}(1, 2, 3)$. (1.0)

6. En metod att mäta in punkter i planet, tex. på en byggplats, är ortogonalmätning. Därvid utnyttjas baslinjen ℓ mellan två kända punkter P och Q . Då en punkt R skall koordinatbestämmas mätes dels vinkelräta avståndet $\|RS\|$ från R till ℓ , dels avståndet $\|PS\|$ från P till fotpunkten S på ℓ . Vid en mätning utnyttjades $P: (0, 1)$ och $Q: (2, 3)$ och följande värden mättes:

$$\|RS\| = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{och} \quad \|PS\| = \frac{\sqrt{80}}{5}$$

Beräkna alla möjliga värden för R :s koordinater om S antas ligga mellan P och Q . (1.0)

SLUT!