LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA, FMAA55
2023-04-19 kl 14.00-19.00

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar och svaren förenklas maximalt. Alla baser och koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade, om inte annat anges.

1. a) Skär linjen $\ell\colon (x, y, z) = (1, 8, 0) + t(1, -2, 3)$ och planet $\pi\colon 2x + y + z - 7 = 0$ varandra? Ange i så fall skärningen. (0.3)

b) Skär linjerna $\ell_1\colon (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, -1, 2)$ och $\ell_2\colon (x, y, z) = (3 + t, 2 + t, 2 - 3t)$ varandra? Ange i så fall skärningen. (0.3)

c) Skär planen $\pi_1\colon 2x + y - 2z + 1 = 0$ och $\pi_2\colon x - y - 4z + 2 = 0$ varandra? Ange i så fall skärningen. (0.4)

2. Betrakta vektorerna $\mathbf{u} = (3, 6, -2)$, $\mathbf{v} = (3, 4, -1)$ och $\mathbf{w} = (1, 9, 4)$.

a) Bestäm arean av parallellogramen som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. (0.3)

b) Bestäm volymet av parallellepipeden som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. (0.4)

c) Bestäm minsta vinkeln mellan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. (0.3)

3. Lös matrisekvationen $\mathbf{A}^2\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}$ där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.0)$$

4. För vilka värden på konstanten a skär planen

$$\pi_1\colon x - y + az = 1 \quad \pi_2\colon 2x + (a - 1)y + z = -1 \quad \pi_3\colon x + 3y - az = -5$$

varandra längs en gemensam rät linje? Ange också denna linjes ekvation för varje sådant värde på a. (1.0)

5. a) Den linjära avbildningen $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uppfyllar $\mathbf{F}(1, 1, 1) = (1, 0, 1)$, $\mathbf{F}(1, 2, 3) = (0, 1, 2)$ och $\mathbf{F}(1, 0, -2) = (1, 1, 3)$. Ange avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$. (0.7)

b) Beräkna $\mathbf{F}(1, 1, -1)$. (0.3)

6. Punkten $P\colon (1, 2, 4)$ speglas i planet $\pi\colon (a + 2)x + ay - z + 1 = 0$. Bestäm alla värden på konstanten a så att spegelbilden av P hamnar på linjen $\ell\colon (x, y, z) = (5 + 2t, 3 + t, 1 + t)$. (1.0)

SLUT!