

1. a) Vi har

$$\vec{AB} = (2 - 3, 3 - 1, 2 - 1) = (-1, 2, 1),$$

$$\vec{AC} = (3 - 3, 4 - 1, 4 - 1) = (0, 3, 3),$$

$$\vec{BC} = (3 - 2, 4 - 3, 4 - 2) = (1, 1, 2).$$

Triangelns omkrets är därför

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| + |\vec{AC}| + |\vec{BC}| &= |(-1, 2, 1)| + |(0, 3, 3)| + |(1, 1, 2)| \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} + \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} + \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{18} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

b) Triangelns area ges av

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| &= \frac{1}{2} |(-1, 2, 1) \times (0, 3, 3)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left( \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} |(6 - 3, -(-3 - 0), -3 - 0)| = \frac{1}{2} |(3, 3, -3)| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 3^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{27} = \frac{3}{2} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

c) Vi har  $\vec{BA} = -\vec{AB} = (1, -2, -1)$ . Då

$$\begin{aligned} \cos \left( [\vec{BA}, \vec{BC}] \right) &= \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{(1, -2, -1) \cdot (1, 1, 2)}{|(1, -2, -1)| |(1, 1, 2)|} \\ &= \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

gäller  $\angle ABC = [\vec{BA}, \vec{BC}] = \arccos \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$ .

2. a) Insättning av  $\ell$ :s ekvation i  $\pi_1$ :s ekvation ger

$$\begin{aligned}2x - y + z - 5 = 0 &\iff 2(1 - t) - (1 + 3t) + (t) - 5 = 0 \\ &\iff 2 - 2t - 1 - 3t + t - 5 = 0 \\ &\iff -4 - 4t = 0 \iff t = -1.\end{aligned}$$

Insättning av  $t = -1$  i  $\ell$ :s ekvation ger skärningspunkten

$$(1 - (-1), 1 + 3(-1), -1) = (2, -2, -1).$$

b) Linjen  $\ell$  går genom punkten  $P_0: (1, 1, 0)$  så

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P} = (1 - 1, 3 - 1, 1 - 0) = (0, 2, 1).$$

Linjen  $\ell$  har riktningsvektorn  $\mathbf{v} = (-1, 3, 1)$ ; observera att  $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$ . Planet  $\pi_2$  har alltså riktningsvektorerna  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ . En normalvektor för  $\pi_2$  är då

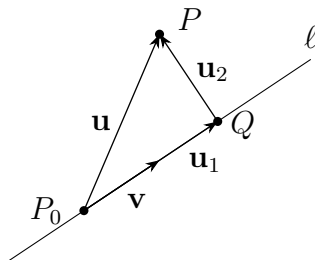
$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{v} \times \mathbf{u} = (-1, 3, 1) \times (0, 2, 1) \\ &= \left( \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (1, 1, -2).\end{aligned}$$

En ekvation för  $\pi_2$  på affin form är alltså  $\pi_2: x + y - 2z + d = 0$  för något  $d$ . Då  $P$  ligger i  $\pi_2$  gäller alltså

$$1 + 3 - 2 \cdot 1 + d = 0 \iff d = -2.$$

Ekvationen är alltså  $\pi_2: x + y - 2z - 2 = 0$ .

c) Låt  $Q$  vara den ortogonala projektionen av  $P$  på  $\ell$ . Från figuren nedan erhålls att  $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{P_0Q}$  är den ortogonala projektionen av  $\mathbf{u}$  på  $\mathbf{v}$ .



Projektionsformeln ger nu

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \left( \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} = \left( \frac{(0, 2, 1) \cdot (-1, 3, 1)}{|(-1, 3, 1)|^2} \right) \mathbf{v} \\ &= \left( \frac{0 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1}{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} \right) \mathbf{v} \\ &= \frac{7}{11}(-1, 3, 1).\end{aligned}$$

Härav erhålls (med notationen från figuren nedan)

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \iff \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = (0, 2, 1) - \frac{7}{11}(-1, 3, 1) = \frac{1}{11}(7, 1, 4).\end{aligned}$$

Minsta avståndet från  $P$  till  $\ell$  ges då av

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}| &= |\mathbf{u}_2| = \left| \frac{1}{11}(7, 1, 4) \right| = \frac{1}{11}|(7, 1, 4)| = \frac{1}{11}\sqrt{7^2 + 1^2 + 4^2} \\ &= \frac{1}{11}\sqrt{49 + 1 + 16} = \frac{1}{11}\sqrt{66}.\end{aligned}$$

**3. a)** Låt  $d = \det(A)$ . Jämförelse av determinanterna ger

$$\det(A^3) = \det(5A). \quad (1)$$

Produktregeln ger

$$\det(A^3) = \det(A)^3 = d^3. \quad (2)$$

Matrisen  $5A$  fås genom att multiplicera var och en av de 4 raderna med 5. Därmed gäller

$$\det(5A) = 5^4 \det(A) = 5^4 d. \quad (3)$$

Från (1), (2) och (3) fås då

$$\begin{aligned}d^3 &= 5^4 d \iff d^3 - 5^4 d = 0 \iff d(d^2 - 5^4) = 0 \\ &\iff d = 0 \text{ eller } d = \pm\sqrt{5^4} = \pm 5^2 = \pm 25\end{aligned}$$

Alltså gäller  $\det(A) \in \{0, \pm 25\}$ . Observera att matriserna

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$



d) Påståendet är falskt. T.ex. gäller  $A^2 = 0$  och  $A \neq 0$  för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Påståendet är sant. Vi har

$$(I + A)(I - A + A^2) = I - A + A^2 + A - A^2 + A^3 = I + A^3 = I$$

och

$$(I - A + A^2)(I + A) = I + A - A - A^2 + A^2 + A^3 = I + A^3 = I.$$

Matrisen  $I + A$  är därför inverterbar med inversen  $I - A + A^2$ .

f) Påståendet är falskt: T.ex. är vektorerna  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$  linjärt oberoende. En bas för  $\mathbb{R}^5$  består dock alltid av 5 stycken vektorer enligt Bassatsen.

g) Påståendet är sant. Då  $(I - AB)^{-1} = C$  gäller

$$(I - AB)C = I \iff C - ABC = I \iff ABC = C - I,$$

och

$$C(I - AB) = I \iff C - CAB = I \iff CAB = C - I.$$

Vi har alltså  $ABC = CAB = C - I$ . Därför gäller

$$\begin{aligned} (I - BA)(I + BCA) &= I + BCA - BA - B(ABC)A \\ &= I + BCA - BA - B(C - I)A \\ &= I + BCA - BA - BCA + BA \\ &= I, \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} (I + BCA)(I - BA) &= I - BA + BCA - B(CAB)A \\ &= I - BA + BCA - B(C - I)A \\ &= I - BA + BCA - BCA + BA \\ &= I. \end{aligned}$$

Matrisen  $I - BA$  är därför inverterbar med inversen  $I + BCA$ .

h) Påståendet är falskt. Om  $AX = 0$  har en icke-trivial lösning ger satsen om lösning av kvadratiska ekvationssystem (Sats 9.10) att  $\det(A) = 0$  och att det finns  $Y$  så att  $AX = Y$  inte är lösbar.

5. Enligt definitionen utgör  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  en ortonormerad bas i  $\mathbb{R}^3$  om

$$|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = |\mathbf{u}_3| = 1 \quad \text{och} \quad \mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_3.$$

Planet  $\pi: x - 2y - 2z = 5$  har normalvektorn  $\mathbf{n} = (1, -2, -2)$  så  $\mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{n}$ . Då  $\mathbf{u}_1$  är en enhetsvektor normerar vi  $\mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathbf{n} = \frac{1}{|(1, -2, -2)|} (1, -2, -2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} (1, -2, -2) = \frac{1}{3} (1, -2, -2). \end{aligned}$$

Linjen  $\ell: (x, y, z) = (1 - 2t, -2 + 3t, -1 + 3t)$  har riktningsvektorn  $\mathbf{v} = (-2, 3, 3)$  så  $\mathbf{u}_3 \perp \mathbf{v}$ . Dessutom gäller  $\mathbf{u}_3 \perp \mathbf{u}_1$  då  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  är en ON-bas. Alltså är  $\mathbf{u}_3$  parallell med

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \times \mathbf{v} &= \frac{1}{3} (1, -2, -2) \times (-2, 3, 3) \\ &= \frac{1}{3} \left( \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} (-6 - (-6), -(3 - 4), 3 - 4) \\ &= \frac{1}{3} (0, 1, -1). \end{aligned}$$

Alltså gäller  $\mathbf{u}_3 \parallel (0, 1, -1)$  och normering ger

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 &= \frac{1}{|(0, 1, -1)|} (0, 1, -1) = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} (0, 1, -1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -1). \end{aligned}$$

Observera att  $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3$  är en enhetsvektor då  $\mathbf{u}_1$  och  $\mathbf{u}_3$  är ortogonala enhetsvektorer. Dessutom är  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3$  positivt orienterad, vilket ger att  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3$  är negativt orienterad, vilket i sin tur ger att  $\mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3$  är positivt orienterad. Alltså gäller

$$\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1.$$

Beräkning ger

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) \times \frac{1}{3}(1, -2, -2) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \left( \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} (-2 - 2, - (0 - (-1)), 0 - 1) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} (-4, -1, -1).\end{aligned}$$

Ett möjligt val av positivt orienterad ON-bas är alltså

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}(1, -2, -2), \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, -1, -1), \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1).$$

6. Determinanten av koefficientmatrisen är:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & a & a \\ b & b & 2a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow^{-1} \\ \leftarrow \end{array} &= \begin{vmatrix} a & a & a \\ b-a & 0 & 0 \\ b & b & 2a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-a & 0 & 0 \\ b & b & 2a \end{vmatrix} \\ &= [\text{utveckling längs rad 2}] \\ &= -a(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & 2a \end{vmatrix} = a(a-b)(2a-b).\end{aligned}$$

Observera att

$$a(a-b)(2a-b) \neq 0 \iff a \neq 0, b \neq a \text{ och } b \neq 2a.$$

Enligt Huvudsatsen har ekvationssystemet alltså entydig lösning om alla tre villkoren  $a \neq 0$ ,  $b \neq a$  och  $b \neq 2a$  är uppfyllda.

Vi betraktar nu de 3 fallen  $a = 0$ ,  $b = a$  och  $b = 2a$  separat.

Om  $a = 0$  är ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 & = & 3 \\ bx & = & 4 \\ bx + by & = & 6 \end{cases}$$

som uppenbarligen saknar lösning.

Om  $b = a$  är ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + ay + az = 3 \\ ax + ay + az = 4 \\ ax + ay + 2az = 6 \end{cases} \xrightarrow{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + ay + az = 3 \\ 0 = 1 \\ ax + ay + 2az = 6 \end{cases}$$

som också saknar lösning.

Om  $a \neq 0$  och  $b = 2a$  är ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + ay + az = 3 \\ 2ax + ay + az = 4 \\ 2ax + 2ay + 2az = 6 \end{cases} \xrightarrow{-1} \xrightarrow{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + ay + az = 3 \\ ax = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{ax} = 1 \\ \textcircled{ay} + az = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Då  $a \neq 0$  fås alltså parameterlösningen  $z = t$ ,  $y = \frac{2}{a} - t$ ,  $x = \frac{1}{a}$ . Det finns alltså oändligt många lösningar i detta fall.

Sammanfattningsvis fås alltså

- $a = 0$  eller  $b = a$ : Saknar lösning.
- $a \neq 0$  och  $b = 2a$ : Oändligt många lösningar.
- $a \neq 0$ ,  $b \neq a$  och  $b \neq 2a$ : Entydig lösning.