

1. a) Skärningen bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} -3 + 2t = -4 + 3s \\ 2t = -7 - 3s \\ 1 = 3 + 2s \end{cases} \iff \begin{cases} 2t - 3s = -1 \\ 2t + 3s = -7 \\ -2s = 2 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{-1} \\ \xleftarrow{-1} \end{array} \iff \begin{cases} \textcircled{2t} - 3s = -1 \\ 6s = -6 \\ -2s = 2 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\frac{1}{3}} \\ \xleftarrow{-1} \end{array} \iff \begin{cases} \textcircled{2t} - 3s = -1 \\ \textcircled{6s} = -6 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vi har alltså $s = -1$ och $t = \frac{1}{2}(-1 + 3s) = \frac{1}{2}(-1 + 3 \cdot (-1)) = -2$.
Insättning av $t = -2$ i ℓ_1 :s ekvation (eller $s = -1$ i ℓ_2 :s ekvation) ger skärningspunkten $(-7, -4, 1)$.

b) Planet π har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)$ och $\mathbf{v}_2 = (3, -3, 2)$.
En normalvektor till π ges därför av

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (2, 2, 0) \times (3, -3, 2) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \right) \\ &= (4, -4, -12) = 4(1, -1, -3). \end{aligned}$$

En ekvation för π på affin form är alltså $\pi: x - y - 3z + d = 0$ för något d . Då $P: (-7, -4, 1)$ ligger i planet gäller alltså

$$-7 - (-4) - 3 \cdot 1 + d = 0 \iff d = 6.$$

Ekvationen är alltså $\pi: x - y - 3z + 6 = 0$.

c) Den ortogonala projektionen ges av

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2} \right) \mathbf{v}_1 &= \left(\frac{(3, 2, 1) \cdot (2, 2, 0)}{|(2, 2, 0)|^2} \right) \mathbf{v}_1 \\ &= \left(\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{2^2 + 2^2 + 0^2} \right) \mathbf{v}_1 \\ &= \frac{10}{8}(2, 2, 0) = \frac{5}{2}(1, 1, 0). \end{aligned}$$

2. a) Linjen går genom punkten $(-2, -1, 5)$ och har riktningsvektorn

$$(-1 - (-2), 1 - (-1), 1 - 5) = (1, 2, -4).$$

Detta ger ekvationen

$$\ell: (x, y, z) = (-2, -1, 5) + t(1, 2, -4) = (-2 + t, -1 + 2t, 5 - 4t).$$

Punkten $(0, 3, -2)$ ligger på linjen precis när ekvationen $(-2 + t, -1 + 2t, 5 - 4t) = (0, 3, -2)$ är lösbar. Vi har

$$\begin{cases} -2 + t = 0 \\ -1 + 2t = 3 \\ 5 - 4t = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \\ 2t = 4 \\ -4t = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Systemet saknar alltså lösning, varför punkten *inte* ligger på linjen.

b) Gausselimination ger

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + 6z + 1 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + 6z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \textcircled{x} - y + 3z = 0 \\ \textcircled{-y} + 3z = -1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \textcircled{x} - y + 3z = 0 \\ \textcircled{-y} + 3z = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vi ser att z kan väljas godtycklig, dvs. vi får parameterlösningen

$$z = t, \quad y = -(-1 - 3t) = 1 + 3t, \quad x = y - 3z = 1 + 3t - 3t = 1.$$

Skärningen är alltså

$$\ell: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 3t \\ z = t, \end{cases}$$

alltså linjen genom punkten $(1, 1, 0)$ med riktningsvektorn $(0, 3, 1)$.

c) Utveckling längs kolonn 2, åtföljd av utveckling längs rad 2, ger determinanten

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \left(-2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 4 \cdot (-2 - 3) + 8(4 - 2) = -20 + 16 = -4. \end{aligned}$$

3. a) En eventuell invers till B kan bestämmas genom att lösa ekvations-systemet $BX = Y$:

$$\begin{aligned}
 BX = Y &\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = y_1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = y_2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{array}{c} \begin{array}{c} \leftarrow^{-3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \leftarrow^2 \end{array} \end{array} \iff \\
 \begin{cases} \textcircled{x_1} - x_2 + 2x_3 = y_1 \\ 5x_2 - 8x_3 = -3y_1 + y_2 \\ -x_2 + 2x_3 = 2y_1 + y_3 \end{cases} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow^2 \end{array} \iff \\
 \begin{cases} \textcircled{x_1} - x_2 + 2x_3 = y_1 \\ x_2 - 2x_3 = -2y_1 - y_3 \\ 5x_2 - 8x_3 = -3y_1 + y_2 \end{cases} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow^1 \end{array} \iff \\
 \begin{cases} \textcircled{x_1} & = -y_1 - y_3 \\ \textcircled{x_2} - 2x_3 & = -2y_1 - y_3 \\ & 2x_3 = 7y_1 + y_2 + 5y_3 \end{cases} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow^1 \end{array} \iff \\
 \begin{cases} \textcircled{x_1} & = -y_1 - y_3 \\ \textcircled{x_2} & = 5y_1 + y_2 + 4y_3 \\ \textcircled{x_3} & = \frac{7}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Matrisen B är alltså inverterbar med inversen

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

b) Vi har

$$XA^{-1} - A^{-1} = B^{-1} \iff X - I = B^{-1}A \iff X = B^{-1}A + I.$$

Beräkning ger nu

$$\begin{aligned}
 X = B^{-1}A + I &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + I \\
 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -19 & -7 & -4 \\ -13 & -5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -19 & -6 & -4 \\ -13 & -5 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

4. Linjen ℓ går genom punkten $P: (0, 1, 0)$ och har riktningsvektorn $\mathbf{v} = (3, -4, -1)$. Linjen ℓ' går genom punkten $P': (1, 0, 1)$ och har riktningsvektorn $\mathbf{v}' = (0, 2, 1)$. Observera att $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{v}'$, så linjerna ℓ och ℓ' är inte parallella. Låt π vara planet som innehåller ℓ och är parallellt med ℓ' . Detta plan har normalvektorn

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{v} \times \mathbf{v}' = (3, -4, -1) \times (0, 2, 1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2, -3, 6).\end{aligned}$$

Ekvationen för π är därför $\pi: 2x + 3y - 6z + d = 0$ för något d . Då π innehåller ℓ som går genom P gäller $2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 + d = 0$, vilket ger $d = -3$. Planet har alltså ekvationen $\pi: 2x + 3y - 6z - 3 = 0$.

Avståndet mellan ℓ och ℓ' ges då av avståndet mellan π och P' . Detta avstånd fås via avståndsformeln:

$$\frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{7}{\sqrt{49}} = 1.$$

5. Vektorekvationen $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ är ekvivalent med det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} (a+1)\lambda_1 & - & \lambda_2 & & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & a\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & + & a\lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

Detta är ett homogent kvadratisk linjärt ekvationssystem med obekanta $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Enligt Huvudsatsen har detta ekvationssystem den entydiga lösningen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ om $\det A \neq 0$, där

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

är ekvationssystemets koefficientmatris. Vi har

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a+1 & -1 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix} = (a+1) \cdot \begin{vmatrix} a & -1 \\ -2 & a \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & a \end{vmatrix} \\ &= (a+1) \cdot (a^2 - 2) + (2a + 2) = (a+1) \cdot (a^2 - 2) + 2(a+1) \\ &= (a+1) \cdot (a^2 - 2 + 2) = a^2(a+1).\end{aligned}$$

Således gäller

$$\det A = 0 \iff a^2(a+1) = 0 \iff a = 0 \text{ eller } a = -1.$$

För $a = 0$ fås

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & = 0 \\ 2\lambda_1 & & -\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & -2\lambda_2 & & = 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} \leftarrow^{-2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & = 0 \\ & 2\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array} \right.$$

som har lösningen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$

För $a = -1$ fås

$$\left\{ \begin{array}{cccc} & - & \lambda_2 & = 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & -\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 & -2\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow^{-1} \\ \leftarrow \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{cccc} 2\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \\ & -\lambda_2 & & = 0 \\ & -\lambda_2 & & = 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} \\ \leftarrow^{-1} \\ \leftarrow \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{cccc} 2\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \\ & -\lambda_2 & & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array} \right.$$

som har lösningen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t \left(\frac{1}{2}, 0, 1 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$

Lösningen till vektorekvationen är alltså

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} t \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right), & t \in \mathbb{R} \quad \text{för } a = 0, \\ t \left(\frac{1}{2}, 0, 1 \right), & t \in \mathbb{R} \quad \text{för } a = -1, \\ (0, 0, 0) & \text{för } a \neq 0, -1. \end{cases}$$

Enligt definitionen är $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ linjärt oberoende exakt när det endast finns lösningen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$ till vektorekvationen, dvs. för $a \neq 0, -1$.

6. a) Enligt uppgiften uppfyller avbildningsmatrisen A för F villkoren

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dessa villkor är ekvivalenta med matrisekvationen

$$A \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi har alltså $AB = C$ där

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Då $\det B = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 = 10 \neq 0$ är B inverterbar med inversen

$$B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Därför gäller $AB = C \iff A = CB^{-1}$, och avbildningsmatrisen för F är alltså

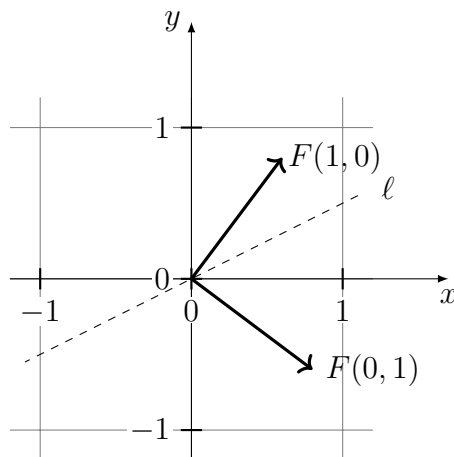
$$A = CB^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Från a) erhålls

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

varav $F(1, 0) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ och $F(0, 1) = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ vilka är ritade nedan.



Enligt figuren verkar F vara en spegling i linjen ℓ , som ritad i figuren ovan. För att kontrollera detta observerar vi att en riktningsvektor $\mathbf{v}$ till linjen uppfyller $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Med $\mathbf{v} = (x, y)$ gäller alltså

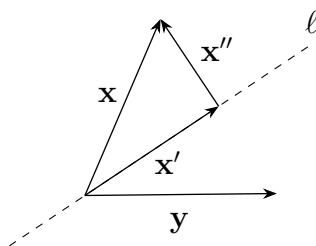
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 4y = 5x \\ 4x - 3y = 5y \end{cases} &\iff \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ 4x - 8y = 0 \end{cases} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}^2 \iff \\ &\iff \begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En möjlig riktningsvektor är alltså $\mathbf{v} = (2, 1)$. Vi visar nu att F är spegling i linjen ℓ med denna riktningsvektor, genom att beräkna speglingens avbildningsmatris. Projektionen av vektorn $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ på $\mathbf{v}$ ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} = \left(\frac{(x_1, x_2) \cdot (2, 1)}{|(2, 1)|^2} \right) \mathbf{v} = \frac{2x_1 + x_2}{5} (2, 1) \\ &= \left(\frac{4x_1 + 2x_2}{5}, \frac{2x_1 + x_2}{5} \right) \end{aligned}$$

Speglingen av $\mathbf{x}$ ges nu enligt figuren av $\mathbf{y} = \mathbf{x} - 2\mathbf{x}''$ där $\mathbf{x}'' = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$.



Vi har alltså

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{x} - 2\mathbf{x}'' = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\mathbf{x} + 2\mathbf{x}' \\ &= -(x_1, x_2) + 2 \left(\frac{4x_1 + 2x_2}{5}, \frac{2x_1 + x_2}{5} \right) = \left(\frac{3x_1 + 4x_2}{5}, \frac{4x_1 - 3x_2}{5} \right) \end{aligned}$$

Speglingen ges alltså av

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x_1 + 4x_2}{5} \\ \frac{4x_1 - 3x_2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{X}$$

Detta visar att F är speglingen i linjen ℓ genom origo med riktningsvektor $(2, 1)$.