Lunds Tekniska Högskola
Matematik
Helsingborg

Lösningar
Linjär algebra, FMAA55
2026-04-14

1. a) Linjerna har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$ och $\mathbf{v}_2 = (-3,-2,1)$. Då $\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2$ är linjerna inte parallella.

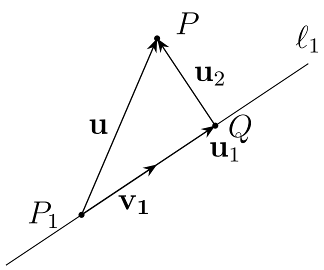
b) Eventuell skärning mellan linjerna finns genom lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1+t &= 4-3s \\ \quad t &= 1-2s \\ 1+t &= 1+s \end{cases} \iff \begin{cases} t+3s &= 3 \\ t+2s &= 1 \\ t-\ \ s &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t+3s &= 3 \\ \quad -\ s &= -2 \\ \quad -4s &= -3 \end{cases} \iff \begin{cases} t+3s &= 3 \\ \quad -\ s &= -2 \\ \qquad 0 &= 5 \end{cases}$$

Lösning saknas, så linjerna skär inte varandra.

c) Punkten $P_1\colon (1,0,1)$ ligger på ℓ_1.



Från figuren erhålls att $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{P_1Q}$ är ortogonala projektionen av $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P}$ på riktningsvektorn $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$. Beräkning ger nu

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P} = (1-1, -1-0, -1-1) = (0,-1,-2),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v_1}}{|\mathbf{v_1}|^2}\right)\mathbf{v_1} \\ &= \left(\frac{(0,-1,-2)\cdot(1,1,1)}{|(1,1,1)|^2}\right)(1,1,1) \\ &= \left(\frac{0\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-2)\cdot 1}{1^2+1^2+1^2}\right)(1,1,1) \\ &= \tfrac{-3}{3}(1,1,1) = (-1,-1,-1). \end{aligned}$$

Alltså gäller

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{OP_1} + \mathbf{u}_1 = (1,0,1) + (-1,-1,-1) = (0,-1,0).$$

Alltså ges ortogonala projektionen av P på ℓ_1 av punkten Q: $(0,-1,0)$.

2. **a)** Skärningen mellan planen finns genom lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+2y-3z-1 &= 0 \\ x-5y+4z+6 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y-3z &= 1 \\ x-5y+4z &= -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z &= 1 \\ \quad -7y+7z &= -7 \end{cases}$$

Återsubstitution ger $z=t$, $y = \frac{1}{-7}(-7-7z) = -\frac{1}{7}(-7-7t) = 1+t$,

$$x = 1-2y+3z = 1-2(1+t)+3t = -1+t.$$

Skärningen av planen är alltså linjen ℓ': $(x,y,z) = (-1+t, 1+t, t)$.

b) Skärningen mellan ℓ och π_1 fås genom att sätta in ℓ:s ekvation i π_1:s ekvation

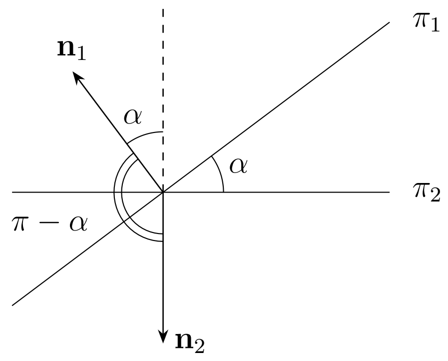
$$\begin{aligned} x+2y-3z-1=0 &\iff (4+t)+2(3-2t)-3(3-t)-1=0 \\ &\iff 4+t+6-4t-9+3t-1=0 \\ &\iff 0=0. \end{aligned}$$

Då detta gäller för alla t ligger ℓ alltså i planet π_1.

c) Planen har normalvektorerna $\mathbf{n}_1 = (1,2,-3)$ och $\mathbf{n}_2 = (1,-5,4)$. Då

$$\begin{aligned} \cos([\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]) &= \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{(1,2,-3)\cdot(1,-5,4)}{|(1,2,-3)||(1,-5,4)|} \\ &= \frac{1\cdot 1 + 2\cdot(-5) + (-3)\cdot 4}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-5)^2+4^2}} \\ &= \frac{-21}{\sqrt{14}\sqrt{42}} = -\frac{21}{14\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

gäller $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ (dvs $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ är trubbig). Betrakta figuren



där vi ritar de två plan så att båda är vinkelräta mot papperets plan. Minsta vinkeln α mellan planen uppfyller alltså $\pi - \alpha = \frac{5\pi}{6}$ vilket ger $\alpha = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

3. a) Vi visar att A är inverterbar och beräknar inversen.

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & y_1 & & & {}^{-1}\quad{}^{1} \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & & y_2 & & \\ -x_1 & & +x_3 & = & & & y_3 & \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & y_1 & & & \\ & 2x_2 & -x_3 & = & -y_1 & +y_2 & & \\ & x_2 & & = & y_1 & & +y_3 & {}_{-2} \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & y_1 & & & \\ & x_2 & & = & y_1 & & +y_3 & \\ & & -x_3 & = & -3y_1 & +y_2 & -2y_3 & {}_{-1} \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x_1 & +x_2 & & = & 4y_1 & -y_2 & +2y_3 & \\ & x_2 & & = & y_1 & & +y_3 & {}_{-1} \\ & & -x_3 & = & -3y_1 & +y_2 & -2y_3 & (\cdot\, -1) \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrr} x_1 & & & = & 3y_1 & -y_2 & +y_3 \\ & x_2 & & = & y_1 & & +y_3 \\ & & x_3 & = & 3y_1 & -y_2 & +2y_3 \end{array}\right.$$

Alltså är A inverterbar med inversen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Då A är inverterbar gäller

$$XA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} A^{-1}$$

Vi har alltså

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Då A är inverterbar gäller

$$A^{-1} Y A^{\mathsf{T}} = I \iff Y A^{\mathsf{T}} = AI = A \iff Y = A \left(A^{\mathsf{T}}\right)^{-1} = A \left(A^{-1}\right)^{\mathsf{T}}$$

Vi har alltså

$$\begin{aligned} Y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. a) Determinanten av ekvationssystemets koefficientmatris beräknas genom utveckling längs rad 2:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a+1 & 3 & a \end{vmatrix} &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 3 \\ a+1 & a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 2 \\ a+1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -(2a-9) + \big(a^2 - 3(a+1)\big) - (3a - 2(a+1)) \\ &= -2a + 9 + a^2 - 3a - 3 - 3a + 2a + 2 \\ &= a^2 - 6a + 8 = (a-2)(a-4). \end{aligned}$$

Enligt Huvudsatsen finns alltså entydig lösning när $a \notin \{2, 4\}$. För $a = 2$ och $a = 4$ finns antingen ingen eller oändligt många lösningar. Vi betraktar nu dessa fall. För $a = 2$ gäller

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 3y + 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 & {\scriptstyle -2}\ \ {\scriptstyle -3} \\ 2x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrr} x & +y & +z = & 1 \\ & & z = & -1 \\ & & -z = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrr} x & +y & +z = & 1 \\ & & z = & -1 \\ & & 0 = & -2 \end{array}\right.$$

varför lösning saknas.

För $a = 4$ gäller

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x & +2y & +3z = & 1 \\ x & + \ y & + \ z = & 1 \\ 5x & +3y & +4z = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrr} x & + \ y & + \ z = & 1 \\ 4x & +2y & +3z = & 1 \\ 5x & +3y & +4z = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrr} x & + \ y & +z = & 1 \\ & -2y & -z = & -3 \\ & -2y & -z = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrr} x & + \ y & +z = & 1 \\ & -2y & -z = & -3 \\ & & 0 = & 0 \end{array}\right.$$

Återsubstitution ger $z = t$, $y = \frac{1}{-2}(-3+z) = -\frac{1}{2}(-3+t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t$

$$x = 1 - y - z = 1 - \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}t\right) - t = 1 - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}t - t = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t.$$

Det finns alltså oändligt många lösningar: $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Samlat fås alltså:

- $a \notin \{2, 4\}$: Entydig lösning.
- $a = 2$: Lösning saknas.
- $a = 4$: Oändligt många lösningar.

b) För $a = 1$ gäller

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +2y & +3z = & 1 \\ x & + \ y & + \ z = & 1 \\ 2x & +3y & + \ z = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrr} x & +2y & +3z = & 1 \\ & - \ y & -2z = & 0 \\ & - \ y & -5z = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrr} x & +2y & +3z = & 1 \\ & -y & -2z = & 0 \\ & & -3z = & 0 \end{array}\right.$$

Återsubstitution ger $z = 0$, $y = -(0 + 2z) = 0$ och $x = 1 - 2y - 3z = 1$, dvs. $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

5. a) Enligt uppgiften uppfyller avbildningsmatrisen A för F villkoren

$$A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}.$$

Dessa villkor är ekvivalenta med matrisekvationen

$$A\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}.$$

Vi har alltså $AB = C$ där

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 2\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}.$$

Om B är inverterbar gäller $AB = C \iff A = CB^{-1}$. Vi verifierar nu att B är inverterbar och beräknar inversen:

$$BX = Y \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases} {}^{-3} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ -x_2 = -3y_1 + y_2 \end{cases} {}_{1}\ (\cdot - 1) \iff$$

$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 + y_2 \\ x_2 = 3y_1 - y_2 \end{cases}$$

Alltså är B inverterbar med inversen

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\3 & -1\end{pmatrix}.$$

Avbildningsmatrisen för F är alltså

$$A = CB^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\-12 & 5\end{pmatrix}.$$

b) Enligt Huvudsatsen gäller F bijektiv $\iff$ $\det A \neq 0$. Då

$$\det A = -5 \cdot 5 - 2 \cdot (-12) = -1 \neq 0,$$

är F alltså bijektiv.

c) Punkterna ligger i xy–planet. Om vi i stället tänker på dem som punkter i $\mathbb{R}^3$, blir de motsvarande punkterna $P\colon (-2,1,0)$, $Q\colon (3,2,0)$ och $R\colon (1,5,0)$. Vi har

$$\overrightarrow{PQ} = (3-(-2), 2-1, 0-0) = (5,1,0),$$
$$\overrightarrow{PR} = (1-(-2), 5-1, 0-0) = (3,4,0).$$

Triangeln T:s area ges därför av

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right\| &= \tfrac{1}{2}\|(5,1,0)\times(3,4,0)\| \\ &= \tfrac{1}{2}\left\|\left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}5 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}5 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right)\right\| \\ &= \tfrac{1}{2}\|(0,0,17)\| = \frac{17}{2}\end{aligned}$$

Determinanten av avbildningsmatrisen är $\det \mathsf{A} = -1$. Enligt Sats 9.11 och anmärkningen efter denna, ges arean av triangeln $F(T)$ av

$$\mathrm{Area}(F(T)) = |\det \mathsf{A}| \cdot \mathrm{Area}(T) = |-1| \cdot \frac{17}{2} = \frac{17}{2}.$$

6. **a)** Om A är en $m \times n$–matris, är A^{T} en $n \times m$–matris. Matrisen $\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ är alltså endast definierad om storleken $m \times n$ stämmer överens med $n \times m$, dvs. om $m = n$. Matrisen A måste alltså vara kvadratisk om den är skevsymmetrisk.

b) För en 2×2–matris $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gäller

$$\begin{aligned}\mathsf{A} \text{ är skevsymmetrisk} &\iff \mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{0} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff a = d = 0, c = -b.\end{aligned}$$

Matrisen $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ är alltså skevsymmetrisk. Då determinanten är $\det \mathsf{A} = 0 - b \cdot (-b) = b^2$, är matrisen alltså inverterbar om $b \neq 0$.

c) Låt A vara en skevsymmetrisk $n \times n$–matris, n udda. Då gäller $\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{0}$ varav $-\mathsf{A} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}}$. Jämförelse av determinanterna ger nu

$$\det(-\mathsf{A}) = \det\left(\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\right) = \det \mathsf{A}. \qquad (1)$$

Observera att matrisen $-\mathsf{A}$ fås från A genom att multiplicera alla n rader med -1. Alltså gäller

$$\det(-\mathsf{A}) = (-1)^n \det \mathsf{A} = -\det \mathsf{A} \qquad (2)$$

då n är udda. Kombineras (1) och (2) erhålls $-\det \mathsf{A} = \det \mathsf{A}$, dvs. $\det \mathsf{A} = 0$. Alltså är A inte inverterbar.