

1. a) Med $A: (1, 0, 1)$ och $B: (1, 1, 2)$ har planet π_1 riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0)$ och

$$\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{AB} = (1 - 1, 1 - 0, 2 - 1) = (0, 1, 1).$$

En normalvektor för π_1 är då

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (-2, 1, 0) \times (0, 1, 1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (1, 2, -2).\end{aligned}$$

En ekvation för π_1 på affin form är alltså $\pi_1: x + 2y - 2z + d = 0$ för något d . Då $A: (1, 0, 1)$ ligger i planet gäller alltså

$$1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + d = 0 \iff d = 1.$$

Ekvationen är alltså $\pi_1: x + 2y - 2z + 1 = 0$.

- b) Skärningen mellan ℓ_1 och π_2 fås genom att sätta in ℓ_1 :s ekvation i π_2 :s ekvation

$$\begin{aligned}x - y + 3z = 4 &\iff (-1 + t) - 2 + 3(2t) = 4 \\ &\iff -1 + t - 2 + 6t = 4 \\ &\iff -3 + 7t = 4 \iff t = 1.\end{aligned}$$

Då det finns entydig lösning skär linjen ℓ_1 alltså π_2 i en punkt.

Skärningen mellan ℓ_2 och π_2 fås på samma sätt

$$\begin{aligned}x - y + 3z = 4 &\iff (1 + t) - (-2t) + 3(1 - t) = 4 \\ &\iff 1 + t + 2t + 3 - 3t = 4 \\ &\iff 4 = 4.\end{aligned}$$

Då detta gäller för alla t ligger ℓ_2 alltså i planet π_2 .

För ℓ_3 erhålls

$$\begin{aligned}x - y + 3z = 4 &\iff (1 - 2t) - (1 + t) + 3t = 4 \\ &\iff 1 - 2t - 1 - t + 3t = 4 \\ &\iff 0 = 4.\end{aligned}$$

Då lösning saknas finns ingen skärning. Alltså är ℓ_3 parallellt med π_2 men ℓ_3 ligger inte i π_2 .

2. a) Eventuell skärning mellan linjerna finns genom lösning av ekvations-systemet

$$\left\{ \begin{array}{lcl} t & = & 1 + 3s \\ 2t & = & 2 - s \\ 1 + 3t & = & 3 + s \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} t - 3s & = & 1 \\ 2t + s & = & 2 \\ 3t - s & = & 2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{-2} \\ \xrightarrow{-3} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \textcircled{t} - 3s & = & 1 \\ 7s & = & 0 \\ 8s & = & -1 \end{array} \right. \xrightarrow{-\frac{8}{7}} \left\{ \begin{array}{lcl} \textcircled{t} - 3s & = & 1 \\ 7s & = & 0 \\ 0 & = & -1 \end{array} \right.$$

Lösning saknas, så linjerna skär inte varandra.

b) Med $A: (1, 1, 1)$, $B: (1, 0, -1)$ och $C: (-3, 0, 0)$ gäller

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (1 - 1, 0 - 1, -1 - 1) = (0, -1, -2), \\ \vec{AC} &= (-3 - 1, 0 - 1, 0 - 1) = (-4, -1, -1).\end{aligned}$$

Triangelns area ges av

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| &= \frac{1}{2} |(0, -1, -2) \times (-4, -1, -1)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} |(-1, 8, -4)| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 8^2 + (-4)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{81} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

c) Vi beräknar först de två faktorerna. Vi har

$$A + I = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

och

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

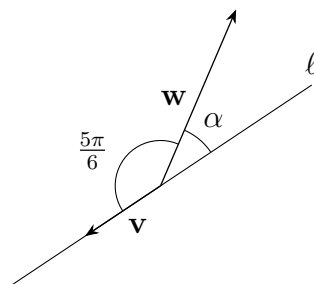
Alltså gäller

$$(A + I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. a) Då linjen har riktningsvektorn $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ erhålls

$$\begin{aligned}\cos([\mathbf{v}, \mathbf{w}]) &= \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|} = \frac{(1, 1, 0) \cdot (-1, -2, 1)}{|(1, 1, 0)| |(-1, -2, 1)|} \\ &= \frac{1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{-1 - 2 + 0}{\sqrt{2} \sqrt{6}} = -\frac{3}{\sqrt{12}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Alltså gäller $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$. Minsta vinkeln mellan ℓ och $\mathbf{w}$ är alltså (jfr. figuren nedan) $\alpha = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.



b) Linjen ℓ går genom punkten $P_0: (2, 1, 5)$ och har riktningsvektorn $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$. Beräkning ger

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0 P} = (3 - 2, 1 - 1, 3 - 5) = (1, 0, -2).$$

Från figuren nedan erhålls att $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{P_0 Q}$ är ortogonal projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$. Projektionsformeln ger nu

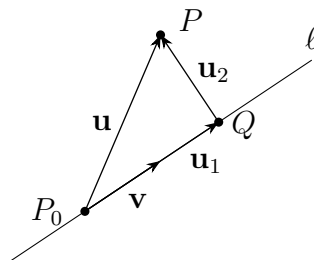
$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} = \left(\frac{(1, 0, -2) \cdot (1, 1, 0)}{|(1, 1, 0)|^2} \right) \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0}{1^2 + 1^2 + 0^2} \right) \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2} (1, 1, 0).\end{aligned}$$

Herav erhålls

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \iff \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = (1, 0, -2) - \frac{1}{2} (1, 1, 0) = \frac{1}{2} (1, -1, -4).\end{aligned}$$

Minsta avståndet från P till ℓ ges då av

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}| &= |\mathbf{u}_2| = |\tfrac{1}{2}(1, -1, -4)| = \tfrac{1}{2}|(1, -1, -4)| = \tfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-4)^2} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + 1 + 16} = \tfrac{1}{2}\sqrt{18} = \tfrac{3}{2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$



4. Enligt Huvudsatsen och Bassatsen är vektorerna $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ linjärt oberoende precis när determinanten nedan är skilt från 0:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a-2 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} &= a^2(a-2) + 0 + 0 - 0 - a - 2a(a-2) \\ &= a^3 - 2a^2 - a - 2a^2 + 4a = a^3 - 4a^2 + 3a \\ &= a(a^2 - 4a + 3). \end{aligned}$$

Enligt pq -formeln gäller $a^2 - 4a + 3 = 0 \iff a = 1$ eller $a = 3$. Alltså gäller

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \text{ linjärt oberoende} \iff a \notin \{0, 1, 3\}.$$

5. a) Enligt uppgiften uppfyllar avbildningsmatrisen A för F villkoren

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad A \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa villkor är ekvivalenta med matrisekvationen

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi har alltså $AB = C$ där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Om B är inverterbar gäller $AB = C \iff A = CB^{-1}$. Vi verifierar nu att B är inverterbar och beräknar inversen:

$$\begin{aligned}
BX = Y &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & y_1 \\ 2x_1 - 4x_2 & = & y_2 \end{array} \right. \begin{array}{c} \leftarrow^{-2} \\ \leftarrow \end{array} \iff \\
&\left\{ \begin{array}{rcl} \textcircled{x_1} + 3x_2 & = & y_1 \\ -10x_2 & = & -2y_1 + y_2 \end{array} \right. \left(\cdot - \frac{1}{10} \right) \iff \\
&\left\{ \begin{array}{rcl} \textcircled{x_1} + 3x_2 & = & y_1 \\ x_2 & = & \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{10}y_2 \end{array} \right. \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow^{-3} \end{array} \iff \\
&\left\{ \begin{array}{rcl} \textcircled{x_1} & = & \frac{2}{5}y_1 + \frac{3}{10}y_2 \\ \textcircled{x_2} & = & \frac{1}{5}y_1 - \frac{1}{10}y_2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Alltså är B inverterbar med inversen

$$B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avbildningsmatrisen är alltså

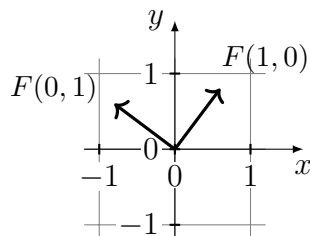
$$A = CB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Från **a)** erhålls

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

varav $F(1, 0) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ och $F(0, 1) = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ som är ritat nedan.



Enligt figuren verkar F vara en rotation kring O . För att kolla detta observerar vi att $F(1, 0)$ är en enhetsvektor:

$$|F(1, 0)| = |(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})| = \frac{1}{5}|(3, 4)| = \frac{1}{5}\sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{25}}{5} = 1.$$

Vi kan därför välja en vinkel θ så att $(\cos(\theta), \sin(\theta)) = F(1, 0) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (mer precist kan vi välja $\theta = \arccos(\frac{3}{5})$). Vi får då

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Då detta är en rotationsmatris är F alltså en rotation kring O i positiv led genom vinkeln θ .

6. Vi observerar först att P inte ligger på ℓ_1 :

$$\begin{cases} 1 = 2 + t \\ 1 = 2t \\ 2 = 2 + t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \\ t = 0. \end{cases}$$

Då lösning saknas ligger P inte på ℓ_1 . Det finns alltså ett entydigt plan π som innehåller P och ℓ_1 . Skärningen Q_1 av ℓ och ℓ_1 måste ligga i π . Planet π innehåller alltså två skilda punkter P och Q_1 från ℓ , så ℓ ligger i π . Skärningen Q_2 av ℓ och ℓ_2 ligger därför också i π . Alltså ges Q_2 av skärningen mellan ℓ_2 och π . Det återstår att utföra beräkningarna.

Punkten $P_1: (2, 0, 2)$ ligger på ℓ_1 varför $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P} = (1-2, 1-0, 2-2) = (-1, 1, 0)$ är en riktningsvektor för π . Då ℓ_1 ligger i π är också ℓ_1 :s riktningsvektor $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$ en riktningsvektor för π . Planet π har alltså normalvektorn

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0) \times (1, 2, 1) = (1, 1, -3).$$

Ekvationen för π är alltså $\pi: x + y - 3z + d = 0$ för något d . Insättning av P ger

$$1 + 1 - 3 \cdot 2 + d = 0 \iff d = 4,$$

dvs. ekvationen är $\pi: x + y - 3z + 4 = 0$. Punkten Q_2 fås nu som skärningen av ℓ_2 och π . Insättning av ℓ_2 :s ekvation i π :s ekvation ger

$$1 + t + 3 + t - 3(4 + t) + 4 = 0 \iff -t - 4 = 0 \iff t = -4.$$

Detta ger $Q_2: (1 + (-4), 3 + (-4), 4 + (-4)) = (-3, -1, 0)$. Linjen ℓ har alltså riktningsvektorn

$$\overrightarrow{PQ_2} = (-3 - 1, -1 - 1, 0 - 2) = (-4, -2, -2) \parallel (2, 1, 1).$$

En ekvation för ℓ på parameterform blir alltså

$$\ell: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

Alternativ lösning: Låt skärningen av ℓ och ℓ_1 vara $P_1: (2+t_1, 2t_1, 2+t_1)$ och låt skärningen av ℓ och ℓ_2 vara $P_2: (1+t_2, 3+t_2, 4+t_2)$. Vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{PP_1} = (2+t_1-1, 2t_1-1, 2+t_1-2) = (t_1+1, 2t_1-1, t_1)$$

$$\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{PP_2} = (1+t_2-1, 3+t_2-1, 4+t_2-2) = (t_2, t_2+2, t_2+2)$$

måste då vara parallella. Beräkning ger

$$\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2 \iff \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

$$\iff (t_1+1, 2t_1-1, t_1) \times (t_2, t_2+2, t_2+2) = \mathbf{0}$$

$$\iff \left(\begin{vmatrix} 2t_1-1 & t_1 \\ t_2+2 & t_2+2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} t_1+1 & t_1 \\ t_2 & t_2+2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t_1+1 & 2t_1-1 \\ t_2 & t_2+2 \end{vmatrix} \right) = \mathbf{0}$$

$$\iff \begin{cases} (2t_1-1)(t_2+2) - t_1(t_2+2) = 0 \\ -(t_1+1)(t_2+2) + t_1t_2 = 0 \\ (t_1+1)(t_2+2) - (2t_1-1)t_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2t_1t_2 + 4t_1 - t_2 - 2 - t_1t_2 - 2t_1 = 0 \\ -t_1t_2 - 2t_1 - t_2 - 2 + t_1t_2 = 0 \\ t_1t_2 + 2t_1 + t_2 + 2 - 2t_1t_2 + t_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t_1t_2 + 2t_1 - t_2 = 2 \\ -2t_1 - t_2 = 2 \\ -t_1t_2 + 2t_1 + 2t_2 = -2 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} t_1t_2 + 2t_1 - t_2 = 2 \\ -2t_1 - t_2 = 2 \\ 4t_1 + t_2 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow 2 \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} t_1t_2 + 2t_1 - t_2 = 2 \\ -2t_1 - t_2 = 2 \\ -t_2 = 4 \end{cases}$$

De två sista ekvationerna ger $t_2 = -4$ och

$$t_1 = \frac{1}{-2}(2 + t_2) = \frac{1}{-2}(2 + (-4)) = 1.$$

Det återstår att kolla den första ekvationen:

$$t_1 t_2 + 2t_1 - t_2 = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 - (-4) = 2.$$

Ekvationen $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$ har alltså den entydiga lösningen $t_1 = 1$, $t_2 = -4$.
Linjen ℓ har därför riktningsvektorn

$$\mathbf{v}_1 = (t_1 + 1, 2t_1 - 1, t_1) = (1 + 1, 2 \cdot 1 - 1, 1) = (2, 1, 1)$$

och en ekvation på parameterform blir

$$\ell: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$