LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **Linjär algebra, FMAA55**
Helsingborg **2022-08-23**

1. a) Vinkeln $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ ges av

$$\cos([\mathbf{u},\mathbf{v}]) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{(1,-1,0)\cdot(-2,1,1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}$$
$$= \frac{-2+(-1)+0}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{4+1+1}} = \frac{-3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = -\frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Detta ger $[\mathbf{u},\mathbf{v}] = \frac{5\pi}{6}$.

b) Det sökta planet π har riktningsvektorerna $\mathbf{w} = (3,1,2)$ och

$$\overrightarrow{AB} = (1-2, 1-2, 1-0) = (-1,-1,1).$$

Planet har alltså normalvektorn

$$\mathbf{w}\times\overrightarrow{AB} = (3,1,2)\times(-1,-1,1) = \left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\right) = (3,-5,-2).$$

Då $A\colon (2,2,0)$ tillhör planet blir ekvationen för π alltså

$$\pi\colon 3(x-2)-5(y-2)-2(z-0)=0 \iff \pi\colon 3x-5y-2z+4=0.$$

c) Planet π har normalvektorn $\mathbf{n} = (3,-5,-2)$ och linjen har riktningsvektorn $\mathbf{v} = (1,-1,4)$. Då

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = (3,-5,-2)\cdot(1,-1,4) = 3+5-8 = 0$$

är $\mathbf{n}\perp\mathbf{v}$. Planet π är alltså parallellt med linjen ℓ.

2. a) Vi har

$$\overrightarrow{AB} = (2-3, 1-0, 1-(-1)) = (-1,1,2),$$
$$\overrightarrow{AC} = (1-3, 1-0, 1-(-1)) = (-2,1,2).$$

Triangelns area är därför

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| &= \frac{1}{2}\|(-1,1,2)\times(-2,1,2)\|\\ &= \frac{1}{2}\left\|\left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\right)\right\|\\ &= \frac{1}{2}\|(2-2, -(-2-(-4)), -1-(-2))\|\\ &= \frac{1}{2}\|(0,-2,1)\|\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5}\end{aligned}$$

b) För att avgöra om vektorerna är linjärt beroende eller oberoende betraktas ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1(3,-1,-4,0)+\lambda_2(1,1,0,2)+\lambda_3(-1,0,1,0)=\mathbf{0} \iff \\
&\qquad (3\lambda_1,-\lambda_1,-4\lambda_1,0)+(\lambda_2,\lambda_2,0,2\lambda_2)+(-\lambda_3,0,\lambda_3,0)=\mathbf{0} \iff \\
&\qquad (3\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3,-\lambda_1+\lambda_2,-4\lambda_1+\lambda_3,2\lambda_2)=(0,0,0,0) \iff \\
&\qquad \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -4\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Detta ekvationssystem kan lösas vha. Gausselimination. Det är dock enklare att titta direkta på systemet: 4:a ekvationen ger $\lambda_2 = 0$. Insättning i 2:a ekvationen ger då $\lambda_1 = 0$. 3:a ekvationen ger nu att $\lambda_3 = 0$. Alltså är $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ den enda lösningen till ekvationssystemet. Vektorerna är därför *linjärt oberoende.*

3. Om $\mathbf{A}$ är inverterbar gäller

$$\mathbf{AX}+\mathbf{C}^{\mathsf{T}}=\mathbf{B} \iff \mathbf{AX}=\mathbf{B}-\mathbf{C}^{\mathsf{T}} \iff \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{B}-\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\right).$$

Vi kollar nu att $\mathbf{A}$ är inverterbar och beräknar $\mathbf{A}^{-1}$.

$$
\begin{cases} x_1 = y_1 \\ -x_2 + 2x_3 = y_2 \\ 3x_1 + 2x_2 = y_3 \end{cases} \quad {\scriptstyle -3} \iff
$$

$$
\begin{cases} x_1 = y_1 \\ -x_2 + 2x_3 = y_2 \\ 2x_2 = -3y_1 + y_3 \end{cases} \quad {\scriptstyle 2} \iff
$$

$$
\begin{cases} x_1 = y_1 \\ -x_2 + 2x_3 = y_2 \\ 4x_3 = -3y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases} \quad {\scriptstyle -1/2} \iff
$$

$$
\begin{cases} x_1 = y_1 \\ -x_2 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3 & (\cdot -1) \\ 4x_3 = -3y_1 + 2y_2 + y_3 & (\cdot 1/4) \end{cases} \iff
$$

$$
\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -\frac{3}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = -\frac{3}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{4}y_3 \end{cases}
$$

Alltså är $\mathbf{A}$ inverterbar med inversen

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösningen blir alltså

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{B} - \mathbf{C}^{\mathsf{T}}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -12 & 8 \\ 18 & -4 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

4. Eventuella skärningspunkter fås genom lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} bx + y + z = 2b+1 \\ x + y + bz = 1-b \\ -x + 2y - z = b+2 \end{cases} \tag{1}$$

Determinanten av koefficientmatrisen är:

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -b - b + 2 - 2b^2 - (-1) - (-1) = -2b^2 - 2b + 4 = -2(b-1)(b+2).$$

Enligt Huvudsatsen gäller då

planen π_1, π_2, π_3 har precis ett skärningspunkt $\iff$
$b \notin \{-2, 1\}$ (dvs. $b \neq -2$ och $b \neq 1$).

Vi betrakter nu fallen $b \in \{-2, 1\}$ separat. Om $b = -2$ är ekvationssystemet (1) följande

$$\begin{cases} -2x + y + z = -3 \\ x + y - 2z = 3 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ -2x + y + z = -3 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 3y - 3z = 3 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 3y - 3z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Lösningen blir $z = t$, $y = \frac{3+3z}{3} = \frac{3+3t}{3} = 1+t$, $x = 3-y+2z = 3-(1+t)+2t = 2+t$.

Om $b = 1$ är ekvationssystemet (1) följande

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Från de två första ekvationerna ser vi direkta att ekvationssystemet saknar lösning i detta fall.

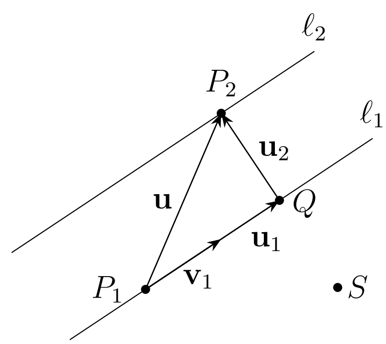
Samlad gäller alltså

- $b \notin \{-2, 1\}$: Precis ett skärningspunkt.
- $b = -2$: Skärningen är linjen $\ell\colon (x, y, z) = (t + 2, t + 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- $b = 1$: Ingen skärning.

Alltså finns det mer än ett skärningspunkt endast för $b = -2$. I detta fall blir skärningen linjen $\ell\colon (x, y, z) = (2 + t, 1 + t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

5. Då riktningsvektorerna för linjerna $\mathbf{v}_1 = (-2, -4, 4)$ och $\mathbf{v}_2 = (1, 2, -2)$ uppfyllar $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2$ gäller $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$, så linjerna är parallella.

För att bestämma avståndet mellan de parallella linjerna väljs först godtyckliga punkter P_1 på ℓ_1 och P_2 på ℓ_2. Sedan beräknas ortogonala projektionen Q av P_2 på ℓ_1. Avståndet ges då av $\|\overrightarrow{QP_2}\|$.



Vi väljer $P_1\colon (1, 1, -3)$ och $P_2\colon (0, 2, 2)$ vilket ger

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (0 - 1, 2 - 1, 2 - (-3)) = (-1, 1, 5).$$

Från figuren erhålls att $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{P_1Q}$ är ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}_1$. Projektionsformeln ger nu

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\right)\mathbf{v}_1 \\
&= \left(\frac{(-1, 1, 5) \cdot (-2, -4, 4)}{\|(-2, -4, 4)\|^2}\right)(-2, -4, 4) \\
&= \left(\frac{2 - 4 + 20}{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2}\right)(-2, -4, 4) \\
&= \tfrac{18}{36}(-2, -4, 4) \\
&= (-1, -2, 2).
\end{aligned}$$

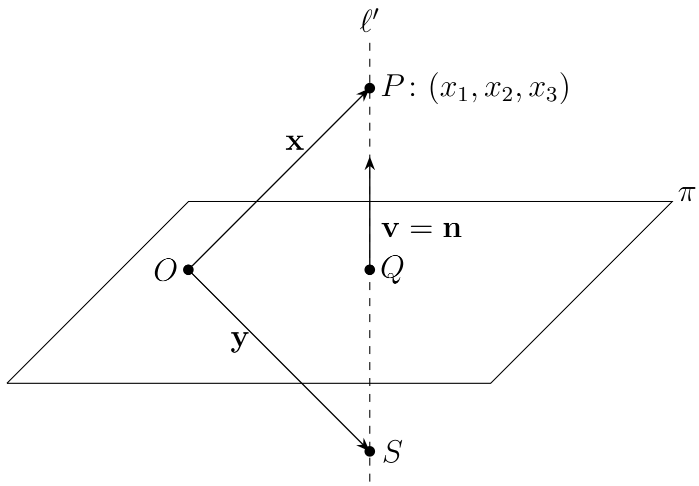
Herav fås

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \iff \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = (-1, 1, 5) - (-1, -2, 2) = (0, 3, 3).$$

Minsta avståndet från ℓ_1 till ℓ_2 ges alltså av

$$\left\|\overrightarrow{QP_2}\right\| = \|\mathbf{u}_2\| = \|(0, 3, 3)\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

6. Låt $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beteckna spegling av rummets vektorer i planet $\pi\colon 2x - y + z = 0$. Vi beräknar först avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$. Observera att origo $O\colon (0,0,0)$ ligger i planet π.



Låt ℓ' vara linjen genom P med riktningsvektor $\mathbf{v} = \mathbf{n} = (2, -1, 1)$ (normalvektorn för π). Skärningspunkten mellan ℓ' och π är då ortogonala projektionen Q av P. Linjen ℓ' har ekvationen

$$\ell'\colon \begin{cases} x = x_1 + 2t \\ y = x_2 - \ \ t \\ z = x_3 + \ \ t \end{cases}$$

på parameterform, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Skärningen mellan ℓ' och π fås genom insättning av ℓ':s ekvation i π:s ekvation

$$\begin{aligned} 2x - y + z = 0 &\iff 2(x_1 + 2t) - (x_2 - t) + (x_3 + t) = 0 \\ &\iff 2x_1 + 4t - x_2 + t + x_3 + t = 0 \\ &\iff 2x_1 - x_2 + x_3 + 6t = 0 \\ &\iff t = \frac{-2x_1 + x_2 - x_3}{6}. \end{aligned}$$

Då spegelbilden S ligger dubbelt så långt från P som ortogonala projektionen Q erhålls $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ genom att sätta in t-värdet

$$t = 2 \cdot \frac{-2x_1 + x_2 - x_3}{6} = \frac{-2x_1 + x_2 - x_3}{3}$$

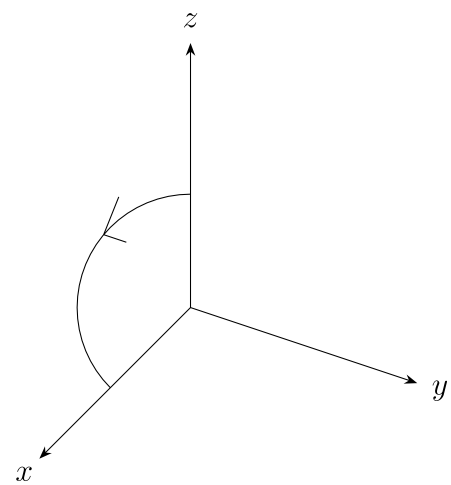
i ℓ':s ekvation:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2t &= x_1 + 2 \cdot \frac{-2x_1 + x_2 - x_3}{3} &= \frac{1}{3}(-\ \ x_1 + 2x_2 - 2x_3) \\ y_2 = x_2 - \ \ t &= x_2 - \ \ \frac{-2x_1 + x_2 - x_3}{3} &= \frac{1}{3}(\ \ 2x_1 + 2x_2 + \ \ x_3) \\ y_3 = x_3 + \ \ t &= x_3 + \ \ \frac{-2x_1 + x_2 - x_3}{3} &= \frac{1}{3}(-2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3) \end{cases}$$

Avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$ är alltså

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Låt $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beteckna vridning av rummets vektorer genom vinkeln $\frac{\pi}{2}$ i positiv led runt y-axeln (sett från spetsen av y-axeln). Vi beräknar nu avbildningsmatrisen för $\mathbf{G}$.



Från figuren ses att

$$\mathbf{G}(1,0,0) = (0,0,-1), \qquad \mathbf{G}(0,1,0) = (0,1,0) \qquad \text{och} \qquad \mathbf{G}(0,0,1) = (1,0,0)$$

vilket enligt Sats 7.2 ger att avbildningsmatrisen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

för $\mathbf{G}$. Spegling åtföljt av rotation är då den sammansatta avbildningen $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$. Enligt Sats 8.1 har denna avbildningsmatrisen

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$