LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
Linjär algebra, FMAA55
2023-04-19

1. a) Insättning av ℓ:s ekvation $(x,y,z) = (1+t, 8-2t, 3t)$ i planets ekvation ger

$$2(1+t)+(8-2t)+3t-7=0 \iff 2+2t+8-2t+3t-7=0 \iff 3t+3=0 \iff t=-1.$$

Insättning av $t=-1$ i ℓ:s ekvation ger då skärningspunkten

$$(x,y,z) = (1+(-1), 8-2(-1), 3(-1)) = (0, 10, -3).$$

b) Skärningen finns genom lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1+\ \ t_1 &= 3+\ \ t_2 \\ 2-\ \ t_1 &= 2+\ \ t_2 \\ 3+2t_1 &= 2-3t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1-\ \ t_2 &= \ \ 2 \quad 1 \quad -2 \\ -t_1-\ \ t_2 &= \ \ 0 \\ 2t_1+3t_2 &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1-\ \ t_2 &= \ \ 2 \\ \ \ -2t_2 &= \ \ 2 \quad \tfrac{5}{2} \\ \ \ 5t_2 &= -5 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1-\ \ t_2 &= 2 \\ \ \ -2t_2 &= 2 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 &= \ \ 1 \\ t_2 &= -1 \end{cases}$$

Insättning av $t_1 = 1$ i ℓ_1:s ekvation (eller $t_2=-1$ i ℓ_2:s ekvation) ger skärningspunkten $(x,y,z) = (1+1, 2-1, 3+2\cdot 1) = (2,1,5)$.

c) Gausselimination ger

$$\begin{cases} 2x & +y & -2z & +1 &= 0 \\ x & -y & -4z & +2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & -y & -4z &= -2 \quad -2 \\ 2x & +y & -2z &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & -y & -4z &= -2 \\ & 3y & +6z &= 3 \quad (\cdot 1/3) \end{cases} \iff \begin{cases} x & -y & -4z &= -2 \\ & y & +2z &= 1 \end{cases}$$

Vi får parameterlösningen

$$z=t, \qquad y = 1-2t, \qquad x = -2+y+4z = -2+1-2t+4t = -1+2t.$$

Skärningen är alltså

$$\ell : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = \ \ \ 1-2t \\ z = \qquad\ \ t, \end{cases}$$

dvs. linjen genom punkten $(-1,1,0)$ med riktningsvektoren $(2,-2,1)$.

2. a) Vektorprodukten av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= (3,6,-2)\times(3,4,-1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-6-(-8), -(-3-(-6)), 12-18) \\ &= (2,-3,-6), \end{aligned}$$

vilket ger parallellogramarean

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|(2,-3,-6)\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7.$$

b) Då

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (2,-3,-6) \cdot (1,9,4) = 2 - 27 - 24 = -49.$$

Alltså är volymen av parallellepipeden $|-49| = 49$.

c) Formeln $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \|(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\| \|\mathbf{w}\| \cos([\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w}])$ ger

$$\begin{aligned} \cos([\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w}]) &= \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}}{\|(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\| \|\mathbf{w}\|} = \frac{-49}{7\sqrt{1^2 + 9^2 + 4^2}} = \frac{-7}{\sqrt{1+81+16}} \\ &= \frac{-7}{\sqrt{98}} = \frac{-7}{7\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

vilket ger $[\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \frac{3\pi}{4}$.

3. Vi har $\mathbf{A}^2\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B} \iff \mathbf{A}^2\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \iff (\mathbf{A}^2 - \mathbf{A})\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$. Vi har

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi viser nu att $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}$ är invertibel och beräknar inversen. Beräkning ger

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -\ x_2 & +2x_3 & = & y_1 \\ & 3x_2 & +2x_3 & = & y_2 \quad {\scriptstyle -2/3} \\ & 2x_2 & +\ x_3 & = & y_3 \end{array} \right. \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -\ x_2 & +2x_3 & = & y_1 \\ & 3x_2 & +2x_3 & = & y_2 \\ & & -\frac{1}{3}x_3 & = & -\frac{2}{3}y_2 + y_3 \quad {\scriptstyle 6 \quad 6} \end{array} \right. \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -\ x_2 & & = & y_1 - 4y_2 + 6y_3 \\ & 3x_2 & & = & -3y_2 + 6y_3 \quad {\scriptstyle 1/3} \\ & & -\frac{1}{3}x_3 & = & -\frac{2}{3}y_2 + \ y_3 \end{array} \right. \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & & & = & y_1 - 5y_2 + 8y_3 \quad (\cdot 1/2) \\ & 3x_2 & & = & -3y_2 + 6y_3 \quad (\cdot 1/3) \\ & & -\frac{1}{3}x_3 & = & -\frac{2}{3}y_2 + \ y_3 \quad (\cdot - 3) \end{array} \right. \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & & & = & \frac{1}{2}y_1 - \frac{5}{2}y_2 + 4y_3 \\ & x_2 & & = & -\ y_2 + 2y_3 \\ & & x_3 & = & 2y_2 - 3y_3 \end{array} \right.$$

Alltså är $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}$ inverterbar med inversen

$$\left(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Vi har därför $(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A})\,\mathbf{X} = \mathbf{B} \Longleftrightarrow \mathbf{X} = (\mathbf{A}^2 - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}$. Beräkning ger

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Eventuella skärningspunkter fås genom lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & - & y & +az & = & 1 \\ 2x & +(a-1) & y & +\ z & = & -1 \\ x & + & 3y & -az & = & -5 \end{cases} \tag{1}$$

Determinanten av koefficientmatrisen är:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & a-1 & 1 \\ 1 & 3 & -a \end{vmatrix} &= -(a-1)a - 1 + 6a - a(a-1) - 2a - 3 \\ &= -a^2 + a - 1 + 6a - a^2 + a - 2a - 3 \\ &= -2a^2 + 6a - 4 = -2\left(a^2 - 3a + 2\right) \\ &= -2(a-1)(a-2). \end{aligned}$$

Enligt Huvudsatsen gäller då

planen π_1, π_2, π_3 har precis ett skärningspunkt $\Longleftrightarrow$
$a \notin \{1, 2\}$ (dvs. $a \neq 1$ och $a \neq 2$).

Vi betrakter nu fallen $a \in \{1, 2\}$ separat. Om $a = 1$ är ekvationssystemet (1) följande

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & 1 \\ 2x & & +z & = & -1 \\ x & +3y & -z & = & -5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & -y & +z & = & 1 \\ & 2y & -z & = & -3 \\ & 4y & -2z & = & -6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x & -y & +z & = & 1 \\ & 2y & -z & = & -3 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

Lösningen blir $z = t$, $y = \frac{-3+z}{2} = \frac{-3+t}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$,

$$x = 1 + y - z = 1 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}t\right) - t = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$$

Om $a=2$ är ekvationssystemet (1) följande

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -\ y & +2z & = & 1 \\ 2x & +\ y & +\ z & = & -1 \\ x & +3y & -2z & = & -5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -\ y & +2z & = & 1 \\ & 3y & -3z & = & -3 \\ & 4y & -4z & = & -6 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -\ y & +2z & = & 1 \\ & 3y & -3z & = & -3 \\ & & 0 & = & -2 \end{array}\right.$$

Från sista ekvationen ser vi direkta att ekvationssystemet saknar lösning i detta fall.

Samlad gäller alltså

- $a \notin \{1,2\}$: Precis ett skärningspunkt.
- $a=1$: Skärningen är linjen $\ell\colon (x,y,z)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t, -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.
- $a=2$: Ingen skärning.

Alltså skär planen varandra längs en gemensam rät linje endast för $a=1$. I detta fall blir skärningen linjen $\ell\colon (x,y,z)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t, -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

5. a) Om $\mathbf{A}$ betecknar avbildningsmatrisen för $\mathbf{F}$ gäller

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\quad \text{och}\quad \mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$$

Dessa tre ekvationer kan skrivas som en matrisekvation

$$\mathbf{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&3&-2\end{pmatrix}}_{\mathbf{B}}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}}_{\mathbf{C}}$$

Vi viser nu att $\mathbf{B}$ är inverterbar och beräknar $\mathbf{B}^{-1}$.

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrr} x_1 & +\ x_2 & +\ x_3 & = & y_1 & & \\ x_1 & +2x_2 & & = & & y_2 & \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & & & y_3 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrr} x_1 & +\ x_2 & +\ x_3 & = & y_1 & & \\ & x_2 & -\ x_3 & = & -y_1 & +y_2 & \\ & 2x_2 & -3x_3 & = & -y_1 & & +y_3 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & y_1 & & \\ & x_2 & -x_3 & = & -y_1 & +\ y_2 & \\ & & -x_3 & = & y_1 & -2y_2 & +y_3 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x_1 & +x_2 & & = & 2y_1 & -2y_2 & +y_3 & \\ & x_2 & & = & -2y_1 & +3y_2 & -y_3 & \\ & & -x_3 & = & y_1 & -2y_2 & +y_3 & (\cdot -1) \end{array}\right. \iff$$

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 4y_1 & -5y_2 & +2y_3 \\ & x_2 & & = & -2y_1 & +3y_2 & -\ y_3 \\ & & x_3 & = & -\ y_1 & +2y_2 & -\ y_3 \end{cases}$$

Alltså är $\mathbf{B}$ inverterbar med inversen

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Då $\mathbf{B}$ är inverterbar gäller $\mathbf{AB} = \mathbf{C} \iff \mathbf{A} = \mathbf{CB}^{-1}$. Beräkning ger

$$\mathbf{A} = \mathbf{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Då

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

gäller $\mathbf{F}(1,1,-1) = (-1,4,7)$.

6. Låt $\mathbf{n} = (a+2, a, -1)$ (en normalvektor till planet π) och ℓ' vara linjen genom P med riktningsvektor $\mathbf{n}$, dvs.

$$\ell' \colon (x,y,z) = (1 + t'(a+2), 2 + t'a, 4 - t'), \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Spegelbilden S av P i planet π måste ligga på båda linjerne ℓ och ℓ', så vi söker skärningen av ℓ och ℓ':

$$\begin{cases} 5 + 2t & = & 1 + t'(a+2) & {}^{-1} \\ 3 + t & = & 2 + t'a & \\ 1 + t & = & 4 - t' & \end{cases} \iff \begin{cases} 5 + 2t & = & 1 + t'(a+2) & \\ -2 - t & = & 1 - 2t' & {}^{-\frac{1}{2}} \\ 1 + t & = & 4 - t' & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5 + 2t & = & 1 + t'(a+2) \\ -2 - t & = & 1 - 2t' \\ 2 + \frac{3}{2}t & = & \frac{7}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} t & = & 1 \\ t' & = & 2 \\ a & = & 1 \end{cases}$$

Enda möjligheten är alltså $a = 1$. I detta fall erhålls $\pi\colon 3x + y - z + 1 = 0$ och $\ell'\colon (x,y,z) = (1 + 3t', 2 + t', 4 - t')$, $t' \in \mathbb{R}$. Skärningen Q mellan ℓ' och π finns genom insättning av ekvationen för ℓ' i ekvationen på normalform för π:

$$3x + y - z + 1 = 0 \iff 3(1 + 3t') + (2 + t') - (4 - t') + 1 = 0 \iff 11t' + 2 = 0.$$

Detta ger $t' = -2/11$. Då t'-värdet för skärningen mellan ℓ och ℓ' inte är samma som dubbla t'-värdet för Q ($2 \neq 2 \cdot (-2/11)$) är skärningen ℓ och ℓ' inte lika med spegelbildet S. Alltså är $a = 1$ inte en möjlighet. Slutsatsen är alltså att det inte finns några a-värden så att S ligger på ℓ.