LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **Linjär algebra, FMAA55**
Helsingborg **2022-06-03**

1. **a)** Skärningen finns genom lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2+\ \ t_1 &= \quad 3-t_2 \\ 3+2t_1 &= -5+3t_2 \\ 1+3t_1 &= \quad 2-2t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1+\ \ t_2 &= \quad 1 \\ 2t_1-3t_2 &= -8 \\ 3t_1+2t_2 &= \quad 1 \end{cases} \begin{matrix} -2,\ -3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} t_1+\ \ t_2 &= \quad 1 \\ \quad -5t_2 &= -10 \\ \quad -\ \ t_2 &= -2 \end{cases} -\tfrac{1}{5} \iff \begin{cases} t_1+\ \ t_2 &= \quad 1 \\ \quad -5t_2 &= -10 \\ \quad\ \ 0 &= \quad 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 &= -1 \\ t_2 &= \quad 2 \end{cases}$$

Insättning av $t_1=-1$ i ℓ_1:s ekvation (eller $t_2=2$ i ℓ_2:s ekvation) ger skärningspunkten $(x,y,z)=(2+(-1),3+2(-1),1+3(-1))=(1,1,-2)$.

b) Då linjerna har ett entydigt skärningspunkt ligger de i ett entydigt bestämd plan π. Detta planet har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1=(1,2,3)$ och $\mathbf{v}_2=(-1,3,-2)$ (riktningsvektorerna för ℓ_1 och ℓ_2 respektiva). Planet π har alltså normalvektorn

$$\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=(1,2,3)\times(-1,3,-2)=\left(\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}\right)=(-13,-1,5).$$

Punkten $P_0\colon (2,3,1)$ från ℓ_1 ligger på π vilket ger ekvationen

$$-13(x-2)-(y-3)+5(z-1)=0 \iff -13x-y+5z+24=0 \iff 13x+y-5z-24=0.$$

2. **a)** Påståendet är falskt: Om $\mathbf{A}=\mathbf{B}=\mathbf{I}$ gäller $\det(\mathbf{AB})=\det(\mathbf{I}\cdot\mathbf{I})=\det(\mathbf{I})=1$ och $\det(\mathbf{A})+\det(\mathbf{B})=\det(\mathbf{I})+\det(\mathbf{I})=1+1=2$.

b) Påståendet är falskt: Om $\mathbf{A}=\mathbf{B}=\mathbf{I}$ (storlek $n\times n$) gäller

$$\det(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\det(\mathbf{I}+\mathbf{I})=\det(2\mathbf{I})=2^n\det(\mathbf{I})=2^n$$

och $\det(\mathbf{A})+\det(\mathbf{B})=\det(\mathbf{I})+\det(\mathbf{I})=1+1=2$.

c) Påståendet är falskt: Om $\mathbf{A}=\mathbf{B}=\mathbf{I}$ gäller $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=(\mathbf{I}+\mathbf{I})^{-1}=(2\mathbf{I})^{-1}=\frac{1}{2}\mathbf{I}$ och $\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{I}^{-1}+\mathbf{I}^{-1}=\mathbf{I}+\mathbf{I}=2\mathbf{I}$.

d) Påståendet är sant: Se Sats 4.4, (4.28).

e) Påståendet är falskt: Om $\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{w}=\mathbf{e}_2$ där $\mathbf{e}_1=(1,0,0)$ och $\mathbf{e}_2=(0,1,0)$ gäller

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1)\times\mathbf{e}_2=\mathbf{0}\times\mathbf{e}_2=\mathbf{0}$$

och

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\mathbf{e}_1\times(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_2$$

där $\mathbf{e}_3=(0,0,1)$.

f) Påståendet är falskt: Enligt definitionen av determinant gäller

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\det(\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w})$$

där $(\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w})$ är matrisen med kolonnerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ och

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{v} = \det(\mathbf{u}\,\mathbf{w}\,\mathbf{v}) = -\det(\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}).$$

g) Påståendet är falskt: Om $\mathbf{Y}=\mathbf{0}$ saknar ekvationssystemet $\mathbf{AX}=\mathbf{Y}=\mathbf{0}$ inte lösning (det finns jo den triviala lösningen $\mathbf{X}=\mathbf{0}$).

h) Påståendet är sant: Se Huvudsatsen (Sammanfatning, villkor (8) och (12), sida 232).

3. Om $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ är inverterbar gäller

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{X}-\mathbf{B}=\mathbf{I} \iff \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{X}=\mathbf{I}+\mathbf{B} \iff \mathbf{X}=\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^{-1}(\mathbf{I}+\mathbf{B}).$$

Vi kollar nu att

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

är inverterbar och beräknar inversen:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = y_1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = y_2 & {}_{1} \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = y_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = y_1 + y_2 & {}^{-3}\ {}^{2} \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = y_2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = y_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \\ x_2 + 5x_3 = -3y_1 - 2y_2 & {}^{1} \\ -x_2 - 4x_3 = 2y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \\ x_2 + 5x_3 = -3y_1 - 2y_2 \\ x_3 = -y_1 + y_3 & {}_{-5} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \\ x_2 = 2y_1 - 2y_2 - 5y_3 & {}_{-1} \\ x_3 = -y_1 + y_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 = -y_1 + 3y_2 + 5y_3 & (\cdot -1) \\ x_2 = 2y_1 - 2y_2 - 5y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 3y_2 - 5y_3 \\ x_2 = 2y_1 - 2y_2 - 5y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_3 \end{cases}$$

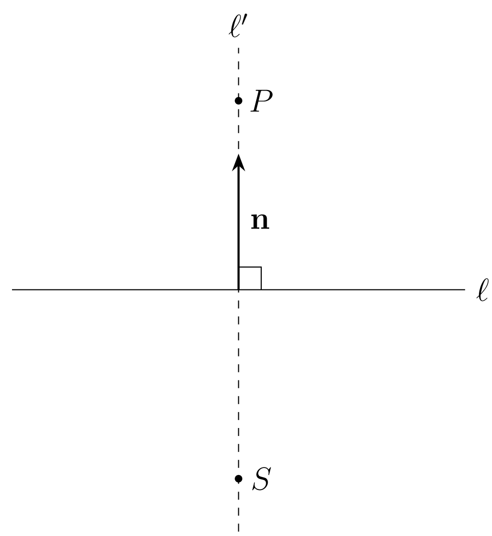
Alltså är $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ inverterbar med inversen

$$\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan nu beräkna $\mathbf{X}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{-1}(\mathbf{I}+\mathbf{B}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -11 & -15 & 0 \\ -9 & -16 & -4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. a) Låt $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beteckna speglingen i ℓ. Låt $P\colon (x_1, x_2)$ vara ett godtyckligt punkt. Låt $S = \mathbf{F}(P)$ vara spegelbilden i ℓ av P.



Låt ℓ' vara linjen genom P med riktningsvektor $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, -1)$ (normalvektorn för ℓ). Linjen ℓ' har ekvationen

$$\ell'\colon \begin{cases} x = x_1 + \sqrt{3}\cdot t \\ y = x_2 - \quad t \end{cases}$$

på parameterform. Skärningen mellan ℓ' och ℓ fås genom insättning av ℓ':s ekvation i ℓ:s ekvation

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cdot x - y = 0 &\iff \sqrt{3}\cdot\left(x_1 + \sqrt{3}\cdot t\right) - (x_2 - t) = 0 \\
&\iff \sqrt{3}\cdot x_1 + 3t - x_2 + t = 0 \\
&\iff 4t + \sqrt{3}\cdot x_1 - x_2 = 0 \\
&\iff t = \tfrac{1}{4}\left(-\sqrt{3}\cdot x_1 + x_2\right)
\end{aligned}$$

Spegelbilden S fås genom att sätta in dubbla t-värdet $t = 2 \cdot \frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}\cdot x_1 + x_2\right)$ i ℓ':s ekvation:

$$\begin{cases} x = x_1 + \sqrt{3}\cdot t & = x_1 + \sqrt{3}\cdot \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\cdot x_1 + x_2\right) & = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 \\ y = x_2 - t & = x_2 - \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\cdot x_1 + x_2\right) & = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \end{cases}$$

dvs. vi får spegelbilden S: $\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)$. Samlad gäller alltså

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(-x_1 + \sqrt{3}\cdot x_2, \sqrt{3}\cdot x_1 + x_2\right)$$

Då

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x_1 + \sqrt{3}\cdot x_2 \\ \sqrt{3}\cdot x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

är $\mathbf{F}$ linjär med avbildningsmatrisen $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

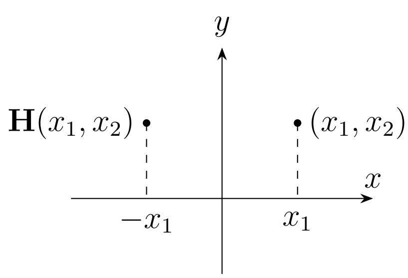
b) Låt $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beteckna rotationen vinkel $\frac{\pi}{3}$ i positiv led kring origo. Avbildningsmatrisen blir (jmf. (7.17) i boken)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

c) Spegling åtföljt av rotation är sammansättningen $\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$. Enligt Sats 8.1 har denna avbildningsmatrisen

$$\mathbf{BA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Om $\mathbf{H}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ betecknar spegling i y-axeln viser figuren nedan att $\mathbf{H}(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$.



Då

$$\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

blir avbildningsmatrisen för $\mathbf{H}$ alltså

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Alternativt kan avbildningsmatrisen för $\mathbf{H}$ beräknas med samma metod som i **a)**). Detta är samma matris som i **a)**, dvs $\mathbf{G}\circ\mathbf{F} = \mathbf{H}$ är spegling i y-axeln.

5. a) Determinanten av matrisen $\mathbf{A} = (\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2\,\mathbf{u}_3)$ är:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2 + 6 - 2a - 2 - 3a = a^2 - 5a + 6 = (a-2)(a-3).$$

Enligt Huvudsatsen gäller då

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \text{ spänner upp } \mathbb{R}^3 \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0 \iff a \notin \{2,3\} \text{ (dvs. } a \neq 2 \text{ och } a \neq 3).$$

b) Om $a \notin \{2,3\}$ vet vi från **a)** att $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ spännar upp $\mathbb{R}^3$. I detta fall går det alltså att skriva *alla* vektorer i $\mathbb{R}^3$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$. Speciellt är $(2-a, 2, a-2)$ en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ om $a \notin \{2,3\}$.

Om $a = 2$ ger $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = (2-a, 2, a-2)$ ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 & = 2 \quad {\scriptstyle -1} \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrl} 2\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 & = & 2 \\ & & 0 & = & -2 \end{array}\right.$$

Lösning saknas, dvs. $(2-a, 2, a-2)$ är *inte* en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ för $a = 2$.

Om $a = 3$ ger $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = (2-a, 2, a-2)$ ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & = & -1 \\ \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & = & 2 \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrrl} \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & = & 2 & {\scriptstyle -3} \quad {\scriptstyle -1} \\ 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & = & -1 & \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +\lambda_3 & = & 1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & = 2 \\ & -7\lambda_2 & & = -7 \quad {\scriptstyle -\frac{1}{7}} \\ & -\lambda_2 & & = -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrrr} \lambda_1 & +3\lambda_2 & +\lambda_3 & = & 2 \\ & -7\lambda_2 & & = & -7 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

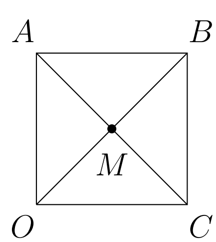
Detta system är lösbart (lösningen är $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1-t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$), dvs. $(2-a, 2, a-2)$ *är* en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ för $a = 3$

Samlad gäller alltså

$$(2-a, 2, a-2) \text{ är en linjärkombination av } \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \iff a \neq 2.$$

6. Låt $B\colon (1,0,1)$. Då $\|\overrightarrow{OB}\| = \|(1,0,1)\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$ är O och B motstående hörn i kvadratet. Planet π som kvadraten ligger i har riktningsvektorerna $(1,2,2)$ och $\overrightarrow{OB} = (1,0,1)$ vilket ger normalvektorn

$$\mathbf{n} = (1,2,2) \times (1,0,1) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, 1, -2).$$



Vi har $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. Om P är ett av de två resterende hörn (dvs. A eller C) är vektorn $\overrightarrow{MP}$ vinkelrätt mot $\mathbf{n}$. Från figuren ses att $\overrightarrow{MP}$ också är vinkelrätt mot $\overrightarrow{OB}$. Därför är $\overrightarrow{MP}$ parallell med

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \times \overrightarrow{OB} = (2, 1, -2) \times (1, 0, 1) = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, -4, -1).$$

Normering ger enhetsvektorn

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-1)^2}}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{18}}\mathbf{u} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{u}$$

Om P är ett av de två resterende hörn gäller $\overrightarrow{MP} \parallel \mathbf{e}$ och $\|\overrightarrow{MP}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vilket ger

$$\overrightarrow{MP} = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e} = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{u} = \pm\tfrac{1}{6}(1, -4, -1).$$

Vi kan nu beräkna P:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right) \pm \tfrac{1}{6}(1, -4, -1) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

De resterende hörn är alltså $A\colon \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ och $C\colon \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Alternativ lösning: Låt $B\colon (1, 0, 1)$. Då $\|\overrightarrow{OB}\| = \|(1, 0, 1)\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$ är O och B motstående hörn i kvadratet. Planet π som kvadraten ligger i har riktningsvektorerna $(1, 2, 2)$ och $\overrightarrow{OB} = (1, 0, 1)$ vilket ger normalvektorn

$$\mathbf{n} = (1, 2, 2) \times (1, 0, 1) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, 1, -2).$$

Då O ligger i π fås ekvationen

$$\pi\colon 2x + y - 2z = 0 \tag{1}$$

Om $P\colon (x, y, z)$ är ett av de övriga hörn gäller

$$\|\overrightarrow{OP}\| = \|(x, y, z)\| = 1 \iff \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \iff x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{2}$$

Dessutom bilder $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ och $\overrightarrow{BP} = (x - 1, y, z - 1)$ en rätt vinkel:

$$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{BP} \iff (x, y, z) \cdot (x - 1, y, z - 1) = 0 \iff x^2 - x + y^2 + z^2 - z = 0$$

Använding av (2) ger nu

$$x^2 - x + y^2 + z^2 - z = 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 = x + z \iff 1 = x + z \tag{3}$$

Kombineras (3) och (1) erhålls

$$\begin{cases} x & & +\ z & = 1 \\ 2x & +y & -2z & = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2} \iff \begin{cases} x & & +\ z & = 1 \\ & y & -4z & = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 1 - t \\ y & = & -2 + 4t \\ z & = & t \end{cases}$$

Insättning i (2) ger

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=1 &\iff (1-t)^2+(-2+4t)^2+t^2=1 \\ &\iff t^2-2t+1+16t^2-16t+4+t^2=1 \\ &\iff 18t^2-18t+4=0 \\ &\iff t=\tfrac{1}{3} \text{ eller } t=\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

varför de två resterende hörn är $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ och $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.