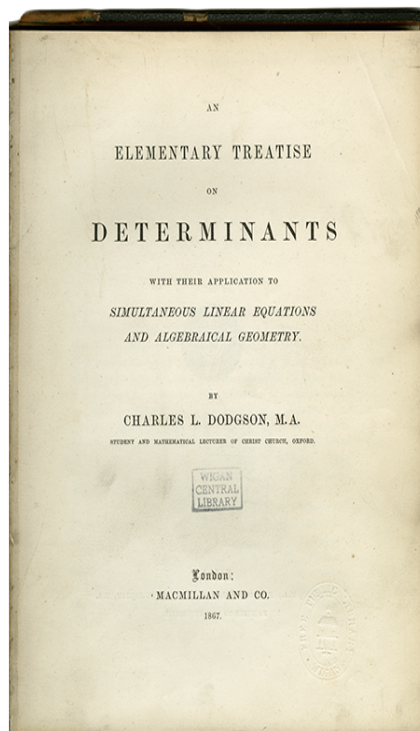


Linjär Algebra 2026

Kasper K. S. Andersen

8 maj 2026

Kapitel 9: Determinanter



Lärobok av Lewis Caroll (1867)

Vi definierar ett reellt tal $\det A$ (*determinanten* av A) för varje *kvadratisk* matris A .

Definition 1 (1×1 -matriser). För $A = (a_{11})$ definieras $\det A = a_{11}$.

Geometrisk tolkning: Detta är "längd med tecken" av kolonnvektorn $\mathbf{a}_1 = (a_{11})$, vanlig längd (utan tecken) är $|a_{11}| = |\det A|$.

Definition 2 (2×2 -matriser). För $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ definieras

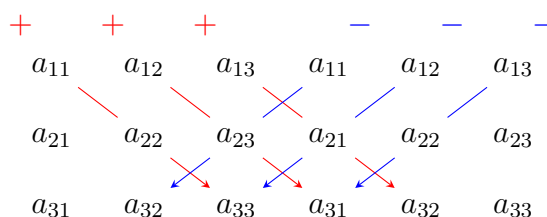
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Geometrisk tolkning: Kolonnvektorerna $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{21})$ och $\mathbf{a}_2 = (a_{12}, a_{22})$ spänner upp ett parallelogram i planet. Enligt anmärkning i Kapitel 5 ges arean av $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = |\det A|$. Alltså är $\det A$ "area med tecken", vanlig area (utan tecken) ges av $|\det A|$.

Definition 3 (Sarrus regel). (Observera: endast för 3×3 -matriser) För

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ definieras

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$



Exempel 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccccc} & + & + & + & - & - & - \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Läs Exempel 9.1, sida 197.

Geometrisk tolkning: A :s kolonnvektorer

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}), \quad \mathbf{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}), \quad \mathbf{a}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

spänner upp en parallelepiped med volym $|(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3|$ enligt Sats 5.2. Beräkning ger

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 &= ((a_{11}, a_{21}, a_{31}) \times (a_{12}, a_{22}, a_{32})) \cdot (a_{13}, a_{23}, a_{33}) \\ &= \left(+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \right) \cdot (a_{13}, a_{23}, a_{33}) \\ &= (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})a_{13} - (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})a_{23} \\ &\quad + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33} \\ &= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= \det A. \end{aligned}$$

Alltså är $\det A$ "volym med tecken", vanlig volym (utan tecken) ges av $|\det A|$.

Den geometriska tolkningen ger

Sats: För en 1×1 -, 2×2 - eller 3×3 -matris gäller

$$\det A \neq 0 \iff A\text{:s kolonnvektorer är en bas.}$$

Kombineras detta med Sats 7.5 erhålls:

$$\boxed{A \text{ inverterbar} \iff \det A \neq 0}$$

Läs Exempel 9.2, sida 198 och Exempel 9.3, sida 198–199.

Sats 9.3: Låt A vara en 3×3 -matris med kolonner A_1 , A_2 och A_3 , dvs. $A = (A_1 \ A_2 \ A_3)$. Vi skriver $|A_1 \ A_2 \ A_3|$ i stället för $\det A$. Då gäller

(1)

$$|A'_1 + A''_1 \ A_2 \ A_3| = |A'_1 \ A_2 \ A_3| + |A''_1 \ A_2 \ A_3|$$

Motsvarande gäller också för kolonn 2 och 3.

(2)

$$|\lambda A_1 \ A_2 \ A_3| = \lambda |A_1 \ A_2 \ A_3|$$

Motsvarande gäller också för kolonn 2 och 3.

(3) Om två kolonner byter plats så byter determinanten tecken, t.ex.

$$\overbrace{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}}^{\downarrow} = - \begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_1 \end{vmatrix}$$

(4) Om A har två identiska kolonner gäller $\det A = 0$, t.ex.

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_1 \end{vmatrix} = 0$$

(5) Om en multipel av en kolonn adderas till en annan kolonn så ändras determinanten inte, t.ex.

$$\overbrace{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}}^{\lambda \downarrow} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \lambda A_1 + A_3 \end{vmatrix}$$

(6) Determinanten av enhetsmatrisen är 1, dvs. $\det I = 1$.

Motsvarande gäller också för 1×1 - och 2×2 -matriser.

Exempel 2.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 18 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} &\stackrel{(2)}{=} 2 \cdot 3 \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}^{-2} \\ &\stackrel{(5)}{=} 6 \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} -11 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}^1 \\ &\stackrel{(5)}{=} 6 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot ((-7) \cdot (-1) \cdot 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0) \\ &= 42, \end{aligned}$$

där vi i nästista steg har använt Sarrus regel.

Läs Exempel 9.4, sida 201–202 och Exempel 9.5, sida 202.

Sats 9.2: För en 1×1 -, 2×2 - eller 3×3 -matris A gäller $\det(A^T) = \det A$.

Bevis. 1×1 -matriser: Om $A = (a_{11})$ gäller $A^T = A$ vilket ger $\det(A^T) = \det A$.

2×2 -matriser: Om $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ gäller

$$\det(A^T) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det A.$$

3×3 -matriser: Läs själv, sida 199. ■

Sats 9.3': Sats 9.3 gäller också om "kolonn" byts till "rad".

Exempel 3. Är matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ inverterbar?

Lösning: Vi har: A inverterbar $\iff \det A \neq 0$. Determinanten blir

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ &\stackrel{(5')}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(4')}{=} 0. \end{aligned}$$

Alltså är A *inte* inverterbar.

Sats 9.4 (Produktregeln): Om A och B är $n \times n$ -matriser, $1 \leq n \leq 3$, gäller $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Sats 9.5(i): Om A är en inverterbar 1×1 -, 2×2 - eller 3×3 -matris gäller $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Bevis: Produktregeln ger

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

varav $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. ■

§9.4 Utveckling av determinant efter rad och kolonn

Definition 4. Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ vara en 3×3 -matris. *Underdeterminanten* D_{ij} definieras som determinanten av den 2×2 -matris som fås från A genom att ta bort *rad* i och *kolonn* j .

Sats 9.6

(1) Låt $i = 1, 2$ eller 3 . Då gäller (utveckling efter *rad* i):

$$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}D_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}D_{i2} + (-1)^{i+3}a_{i3}D_{i3}.$$

(2) Låt $j = 1, 2$ eller 3 . Då gäller (utveckling efter *kolonn* j):

$$\det(A) = (-1)^{1+j}a_{1j}D_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}D_{2j} + (-1)^{3+j}a_{3j}D_{3j}.$$

Exempel 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 18 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Enligt Exempel 2 gäller $\det(A) = 42$. Vi

kollar detta genom utveckling efter rad 1 och genom utveckling efter kolonn 2.

Utveckling efter rad 1 ger

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1}a_{11}D_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}D_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}D_{13} \\ &= a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 18 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-6) - 8 \cdot 3 + 18 \cdot 4 \\ &= -6 - 24 + 72 \\ &= 42. \end{aligned}$$

Utveckling efter kolonn 2 ger

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+2}a_{12}D_{12} + (-1)^{2+2}a_{22}D_{22} + (-1)^{3+2}a_{32}D_{32} \\ &= -a_{12}D_{12} + a_{22}D_{22} - a_{32}D_{32} \\ &= -8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 18 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 18 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -8 \cdot 3 - 2 \cdot (-33) - 0 \\ &= -24 + 66 \\ &= 42.\end{aligned}$$

Läs själv Exempel 9.6, sida 205 och Exempel 9.7, sida 206. Adjunkt, sida 207–209 ingår inte. §9.5 Cramers regel ingår inte.

§9.8–9.9 Determinanter av högre ordning

Definition 5. Om A är en $n \times n$ -matris, är $\det A$ summan av alla möjliga produkter av n matriselement med ett från varje rad och ett från varje kolonn med “passande” tecken.

Exempel 5. $n = 2$: Det finns $2 \cdot 1 = 2$ produkter (1 med “+” och 1 med “-”), $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

$n = 3$: Det finns $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ produkter (3 med “+” och 3 med “-”), Sarrus regel.

$n = 4$: Det finns $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ produkter (12 med “+” och 12 med “-”), Sarrus regel gäller *inte* för $n \geq 4$.

Sats: Alla tidigare satser (mer precist Sats 9.2, 9.3, 9.3’, 9.4, 9.5 och 9.6) om determinanter av 1×1 -, 2×2 - och 3×3 -matriser gäller också för $n \times n$ -matriser, $n \geq 4$.

Bevis: Ingår inte. ■

Exempel 6. Determinanten av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

kan beräknas m.h.a. utveckling längs rad 1:

$$\begin{aligned} \det A &= \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \dots = 2 \cdot (-5) - 4 \cdot 2 + 0 - 3 \cdot (-5) = -3. \end{aligned}$$

Oftast är det dock snabbare att utföra rad-/kolonnoperationer innan determinanten utvecklas. Läs själv Exempel 9.16, sida 219-220 och Exempel 9.17, sida 220.

§9.6 Huvudsatsen

Sats 9.9 (Huvudsatsen): Låt A vara en $n \times n$ -matris. Då är följande villkor ekvivalenta:

- (1) $\det A \neq 0$.
- (2) A 's kolonnvektorer är en bas i \mathbb{R}^n .
- (3) A 's radvektorer är en bas i \mathbb{R}^n .
- (4) Ekvationssystemet $AX = 0$ har endast lösningen $X = 0$.
- (5) Ekvationssystemet $AX = Y$ är lösbart för alla Y .
- (5') Ekvationssystemet $AX = Y$ är entydigt lösbart för alla Y .
- (6) A är inverterbar.
- (7) Den linjära avbildningen $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ med avbildningsmatris A är bijektiv.

Läs Exempel 9.10–9.11, sida 213.

Sats 9.10: Låt A vara en $n \times n$ -matris.

	Homogena systemet $AX = 0$	Generella systemet $AX = Y$
$\det A \neq 0$	Endast lösningen $X = 0$	Entydig lösning för alla Y
$\det A = 0$	Oändligt många lösningar (=parameterlösning)	Lösning saknas eller oändligt många lösningar (beroende på Y). Båda fall kan förekomma.

Exempel 7. Bestäm för varje värde på a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x + 2y + az = 2 \\ x + ay + 3z = 2. \end{cases}$$

Lösning: Koefficientmatrisen A har determinant

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right\}^{-1} \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-3 \\ 0 & a-2 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{utveckling efter kolonn 1}) \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & a-3 \\ a-2 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 0 \\ &= -(a-2)(a-3). \end{aligned}$$

Alltså gäller $\det A = 0 \iff a = 2$ eller $a = 3$. Vi delar i tre fall:

$a \neq 2$ och $a \neq 3$: $\det A \neq 0$, entydig lösning enligt Huvudsatsen.

$a = 2$: Ingen eller oändligt många lösningar enligt Huvudsatsen. Gausselimination ger

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right\}^{-1} \iff \begin{cases} \textcircled{x} + 2y + 3z = 2 \\ \textcircled{-z} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vi får en parameterlösning: $z = 0$, $y = t$, $x = 2 - 2t$. Vi får alltså oändligt många lösningar och lösningsmängden blir en linje $(x, y, z) = (2 - 2t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

$a = 3$: Ingen eller oändligt många lösningar enligt Huvudsatsen. Gausselimination ger

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 3z = 2 \end{cases} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right\}^{-1} \iff \begin{cases} \textcircled{x} + 2y + 3z = 3 \\ 0 = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Lösning saknas alltså.

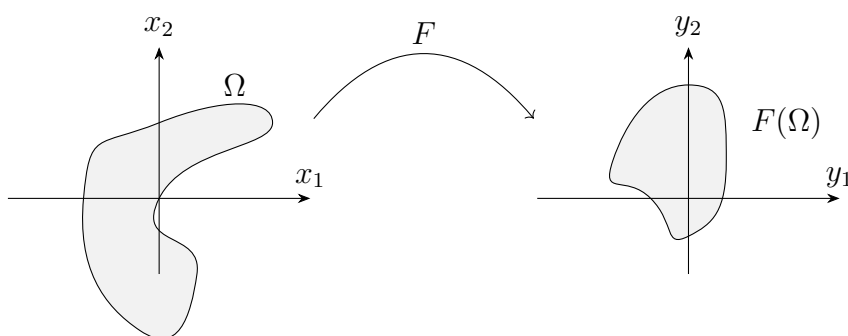
Samlat gäller:

- $a \notin \{2, 3\}$: Entydig lösning.
- $a = 2$: Oändligt många lösningar.
- $a = 3$: Lösning saknas.

9.7 Determinanter och linjära avbildningar

Sats: Låt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris A . Låt Ω vara en "tillräckligt bra" delmängd av \mathbb{R}^2 . Då gäller

$$\text{Area}(F(\Omega)) = |\det A| \cdot \text{Area}(\Omega).$$



Motsvarande gäller också i dimension 3: Låt $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris A och låt Ω vara en delmängd av \mathbb{R}^3 . Då gäller

$$\text{Volym}(F(\Omega)) = |\det A| \cdot \text{Volym}(\Omega).$$

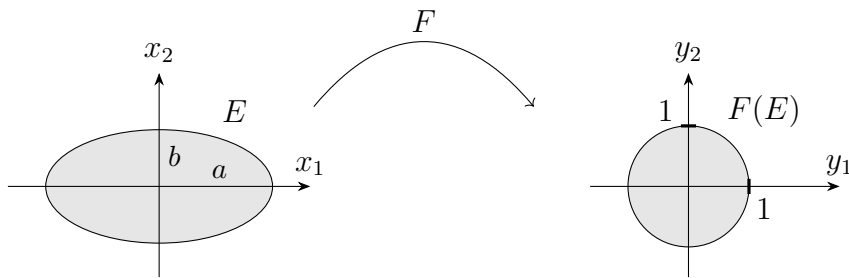
Exempel 8 (Ellipsens area). Vi beräknar arean av en ellipsskiva E med halvaxlarna a och b . Ekvationen för E är

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Låt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara avbildningen $F(x_1, x_2) = (y_1, y_2) = \left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}\right)$. Då är F linjär med avbildningsmatris

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

Då $y_1 = \frac{x_1}{a}$ och $y_2 = \frac{x_2}{b}$ gäller $y_1^2 + y_2^2 = 1$, dvs. $F(E) =$ enhetscirkelskivan.



Vi har $\text{Area}(F(E)) = |\det A| \cdot \text{Area}(E)$ vilket ger

$$\text{Area}(E) = \frac{\text{Area}(F(E))}{|\det A|} = \frac{\text{Area}(\text{enhetscirkelskivan})}{\left|\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right|} = \frac{\pi \cdot 1^2}{\left(\frac{1}{ab}\right)} = \pi ab.$$