

Linjär Algebra 2026

Kasper K. S. Andersen

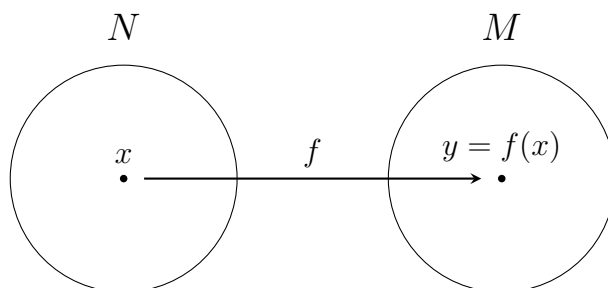
8 maj 2026

Kapitel 8: Linjära avbildningar

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrix transform (xkcd comic #184). “In fact, draw all your rotational matrices sideways. Your professors will love it! And then they’ll go home and shrink.”

Definition 1. Låt N och M vara mängder. En *funktion* $f: N \rightarrow M$ är en regel som till varje $x \in N$ ordnar ett element $y \in M$. Vi skriver $y = f(x)$ och säger att y är *bilden av* x .



Analys 1 och 2 handlar om *reella* funktioner (där N och M är delmängder av \mathbb{R}), t.ex. $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$, ...

I linjär algebra studeras *linjära* avbildningar (=funktioner) $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Exempel 1. Låt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2)$.

Med $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ och $Y = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$ gäller

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = AX, \text{ där } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

“ F kan skrivas på matrisform.”

Exempel 2. Låt $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G(x_1, x_2) = (2x_1, x_2^2)$. Då finns ingen konstant matris $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ så att

$$Y = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = AX$$

för alla $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. “ G kan *inte* skrivas på matrisform.”

Läs själv Exempel 8.1, sida 158–159.

Definition 2. Avbildningen $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är *linjär* om det för alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ och alla reella tal λ gäller

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) \text{ och } F(\lambda\mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u}).$$

(“ F bevarar vektorsummor och skalärmultiplar”).

Anmärkning: Om $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är linjär är $F(\mathbf{0}) + F(\mathbf{0}) = F(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = F(\mathbf{0})$ vilket ger $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Om en avbildning $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inte uppfyller $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ är F alltså inte linjär. (Å andra sidan gäller det inte att om $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ då är F linjär, jmf. avbildningen G från Exempel 4 nedan).

Exempel 3 (Exempel 1 igen). Låt

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2),$$

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Då gäller

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) &= F(u_1, u_2) + F(v_1, v_2) = \\ &= (u_1 + 2u_2, 2u_1 + u_2, 2u_1 - 3u_2) + (v_1 + 2v_2, 2v_1 + v_2, 2v_1 - 3v_2) = \\ &= (u_1 + 2u_2 + v_1 + 2v_2, 2u_1 + u_2 + 2v_1 + v_2, 2u_1 - 3u_2 + 2v_1 - 3v_2), \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= F((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) = F(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = \\ &= (u_1 + v_1 + 2(u_2 + v_2), 2(u_1 + v_1) + u_2 + v_2, 2(u_1 + v_1) - 3(u_2 + v_2)) = \\ &= (u_1 + v_1 + 2u_2 + 2v_2, 2u_1 + 2v_1 + u_2 + v_2, 2u_1 + 2v_1 - 3u_2 - 3v_2), \end{aligned}$$

dvs. $F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Dessutom är

$$\begin{aligned} F(\lambda \mathbf{u}) &= F(\lambda(u_1, u_2)) = F(\lambda u_1, \lambda u_2) \\ &= (\lambda u_1 + 2\lambda u_2, 2\lambda u_1 + \lambda u_2, 2\lambda u_1 - 3\lambda u_2), \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \lambda F(\mathbf{u}) &= \lambda(u_1 + 2u_2, 2u_1 + u_2, 2u_1 - 3u_2) \\ &= (\lambda(u_1 + 2u_2), \lambda(2u_1 + u_2), \lambda(2u_1 - 3u_2)) \\ &= (\lambda u_1 + 2\lambda u_2, 2\lambda u_1 + \lambda u_2, 2\lambda u_1 - 3\lambda u_2), \end{aligned}$$

dvs. $F(\lambda \mathbf{u}) = \lambda F(\mathbf{u})$. Alltså är F linjär.

Exempel 4 (Exempel 2 igen). Låt $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G(x_1, x_2) = (2x_1, x_2^2)$. Då gäller t.ex.

$$\begin{aligned} G(3(0, 1)) &= G(0, 3) = (2 \cdot 0, 3^2) = (0, 9) \\ 3G(0, 1) &= 3(2 \cdot 0, 1^2) = 3(0, 1) = (0, 3) \end{aligned}$$

dvs. $G(3(0, 1)) \neq 3G(0, 1)$. Alltså är G inte linjär.

Sats 8.1(i): Låt $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en avbildning, $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$. Låt X och Y vara kolonnmatriserna motsvarande \mathbf{x} och \mathbf{y} respektive. Då gäller

$$F \text{ är linjär} \iff \text{Det finns en } m \times n\text{-matris } A \text{ så att } Y = AX.$$

Anmärkning: A är entydigt bestämd om den finns, dvs. om F är linjär, jmf. Sats 8.1(ii) nedan. Denna matris kallas *avbildningsmatrisen* för F .

Exempel 5 (Exempel 1&2 igen). F kan skrivas på matrisform, så F är linjär enligt Sats 8.1(i). Vi ser även att F har avbildningsmatrisen

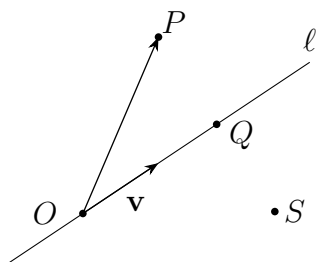
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

G kan inte skrivas på matrisform, så enligt Sats 8.1(i) är G inte linjär.

Ortogonal projektion och spegling

Exempel 6. Låt ℓ vara linjen genom $O: (0,0)$ med riktningsvektor $\mathbf{v} = (2, -1)$. Låt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara orthogonal projektion på ℓ och $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara spegling i ℓ . Vi bevisar att F och G är linjära och beräknar avbildningsmatriserna.

Låt $P: (x_1, x_2)$ vara en godtycklig punkt. Låt $Q = F(P)$ beteckna projektionen av P och $S = G(P)$ vara spegelbilden av P .



Enligt figuren är \overrightarrow{OQ} projektionen \overrightarrow{OP} på \mathbf{v} , dvs.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \left(\frac{\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{(x_1, x_2) \cdot (2, -1)}{2^2 + (-1)^2} \right) (2, -1) \\ &= \left(\frac{2x_1 - x_2}{5} \right) (2, -1) \\ &= \frac{1}{5} (4x_1 - 2x_2, -2x_1 + x_2)\end{aligned}$$

varav $F(x_1, x_2) = \frac{1}{5}(4x_1 - 2x_2, -2x_1 + x_2)$. Då

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

är F linjär med avbildningsmatrisen $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Dessutom visar figuren att

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PQ} \\ &= \overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \\ &= -\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ} \\ &= -(x_1, x_2) + \frac{2}{5} (4x_1 - 2x_2, -2x_1 + x_2) \\ &= \frac{1}{5} (3x_1 - 4x_2, -4x_1 - 3x_2),\end{aligned}$$

varav $G(x_1, x_2) = \frac{1}{5}(3x_1 - 4x_2, -4x_1 - 3x_2)$. Då

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ -4x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

är G linjär med avbildningsmatrisen $B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Läs själv Exempel 8.2, sida 159–160 och Exempel 8.3, sida 160–161.

Sats: Ortogonal projektion på en linje i planet/en linje i rummet/ett plan i rummet genom O är linjära avbildningar. Detsamma gäller för spegling.

Direkt bestämning av avbildningsmatriser

Sats 8.1(ii): Anta att $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning med avbildningsmatris A . Då ges A 's kolonnvektorer av

$$F(1, 0, \dots, 0), \quad F(0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad F(0, \dots, 0, 1)$$

respektive. Speciellt är A entydigt bestämd.

Anmärkning: Sats 8.1(ii) kan endast användas om vi redan vet att F är linjär.

Exempel 7 (Exempel 1 igen). Enligt Exempel 3 är avbildningen

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2)$$

linjär. Då

$$\begin{aligned} F(1, 0) &= (1 + 2 \cdot 0, 2 \cdot 1 + 0, 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0) = (1, 2, 2), \\ F(0, 1) &= (0 + 2 \cdot 1, 2 \cdot 0 + 1, 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1) = (2, 1, -3) \end{aligned}$$

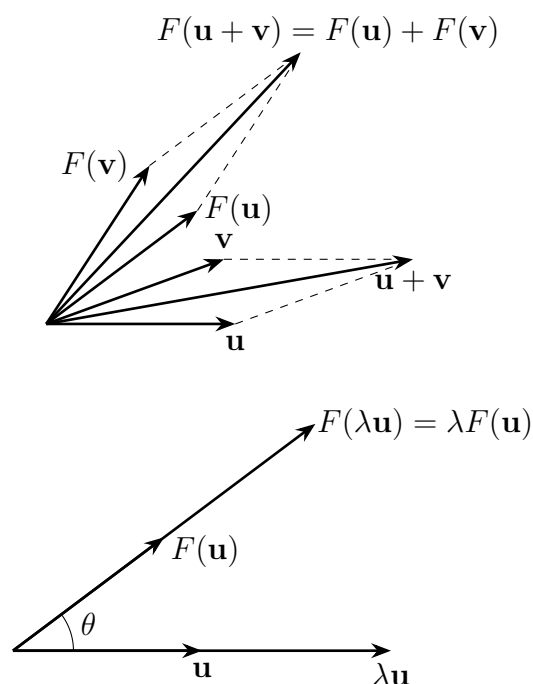
är avbildningsmatrisen alltså

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

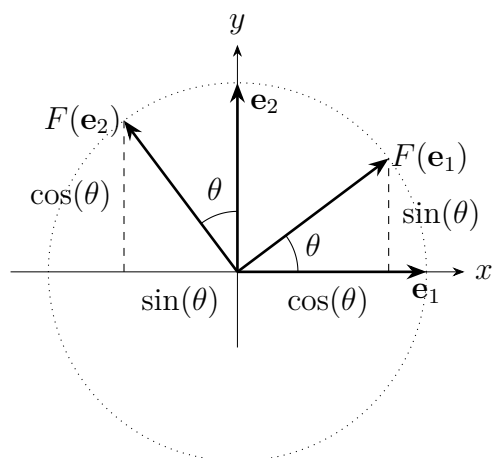
Rotation

Sats: Avbildningen $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som ges av rotation vinkel θ moturs kring O är linjär med avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Bevis: Figurerna nedan visar att F är linjär.



Vi kan nu bestämma avbildningsmatrisen för F mha. Sats 8.1(ii). Låt $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ vara standardbasen för \mathbb{R}^2 .



Figuren ger $F(\mathbf{e}_1) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ och

$$F(\mathbf{e}_2) = \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Avbildningsmatrisen blir alltså

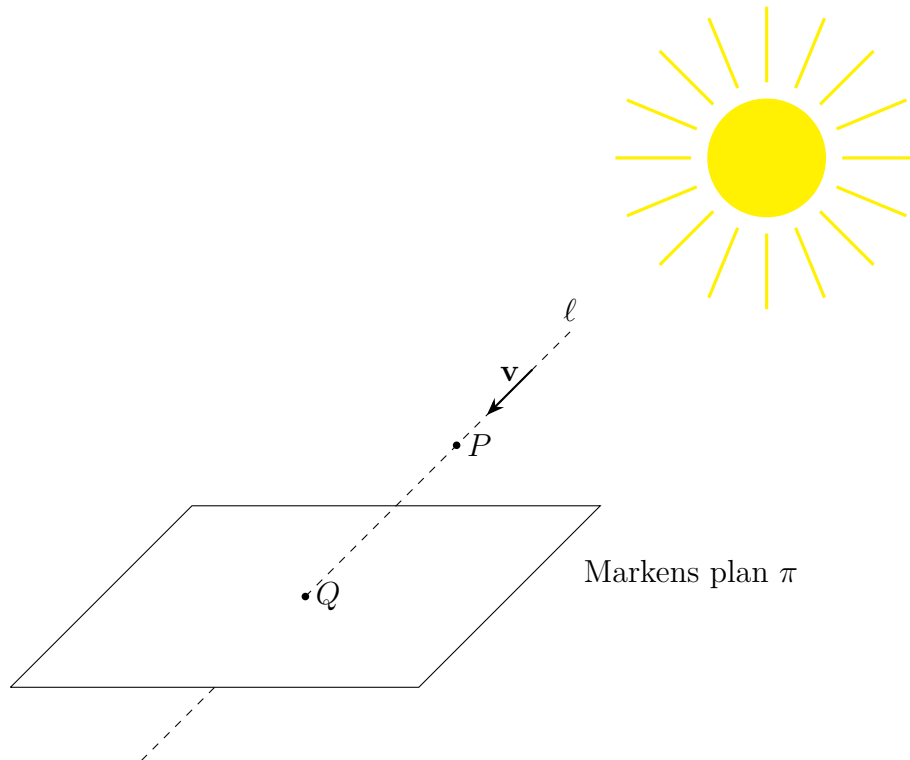
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

■

Snedd projektion (projektion längs en linje)

Exempel 8 (Exempel 8.9, sida 171). Vi beräknar skuggbilden av punkten $P: (x_1, x_2, x_3)$ på markens plan $\pi: x - 2y + 2z = 0$. Solens riktning ges av vektorn $\mathbf{v} = (3, 1, -1)$.

Lösning: Då solen är långt borta kan vi anta att alla strålar från solen är parallella och har riktning \mathbf{v} (även om detta inte syns på figuren!).



Låt $Q: (y_1, y_2, y_3)$ vara skuggbilden av P och definiera $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ genom $F(P) = Q$. Skuggbilden Q ges som skärningen mellan planet π och linjen ℓ genom $P: (x_1, x_2, x_3)$ med riktningsvektor $\mathbf{v} = (3, 1, -1)$.

$$\ell: \begin{cases} x = x_1 + 3t \\ y = x_2 + t \\ z = x_3 - t \end{cases}$$

Skärningen mellan π och ℓ erhålls genom insättning av ℓ :s ekvation i π :s ekvation

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z = 0 &\iff (x_1 + 3t) - 2(x_2 + t) + 2(x_3 - t) = 0 \\ &\iff x_1 + 3t - 2x_2 - 2t + 2x_3 - 2t = 0 \\ &\iff x_1 - 2x_2 + 2x_3 - t = 0 \\ &\iff t = x_1 - 2x_2 + 2x_3. \end{aligned}$$

Insättning av detta t -värde i ℓ :s ekvation ger

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3t = x_1 + 3(x_1 - 2x_2 + 2x_3) = 4x_1 - 6x_2 + 6x_3 \\ y_2 = x_2 + t = x_2 + x_1 - 2x_2 + 2x_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 - t = x_3 - (x_1 - 2x_2 + 2x_3) = -x_1 + 2x_2 - x_3, \end{cases}$$

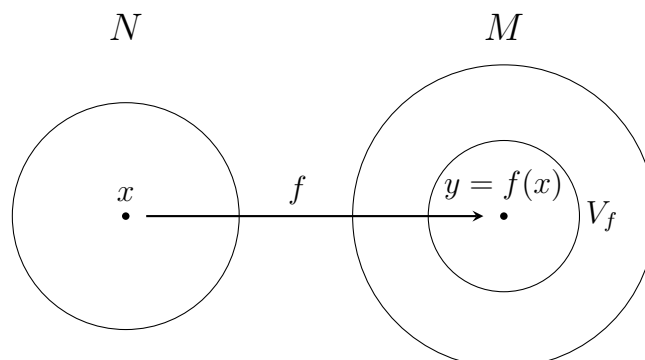
dvs.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Sats 8.1(i) ger då att F är linjär med 3×3 -matrisen A ovan som avbildningsmatris.

§8.4 Sammansättning och invers avbildning

Definition 3. Låt $f: N \rightarrow M$ vara en avbildning. *Värdemängden* V_f består av alla $y \in M$ som är bild av något $x \in N$.



Vi har alltså $V_f = \{y \in M \mid y = f(x) \text{ för något } x \in N\}$. Det gäller $V_f \subseteq M$, dvs. V_f är en delmängd av M .

Exempel 9. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ och $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$. Då gäller $V_f = \mathbb{R}$ och $V_g = [0, \infty[$.

För en linjär avbildning $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ med avbildningsmatris A gäller

$$\begin{aligned} V_F &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \text{ för något } \mathbf{x}\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid Y = AX \text{ för något } X\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid Y = AX \text{ är lösbar}\}. \end{aligned}$$

Exempel 10 (Exempel 6 igen). Låt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ och $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ortogonal projektion på och spegling i linjen ℓ genom $(0, 0)$ med riktningsvektor $\mathbf{v} = (2, -1)$. Bestäm V_F och V_G .

Lösning: Enligt Exempel 6 är F och G linjära med avbildningsmatriserna $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ respektive. Gausselimination ger

$$\begin{aligned} AX = Y &\iff \begin{cases} \frac{4}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 = y_1 \\ -\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{4}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 = y_1 \\ 0 = \frac{1}{2}y_1 + y_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{4}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_2 = y_1 \\ 0 = \frac{1}{2}y_1 + y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså gäller:

$$(y_1, y_2) \in V_F \iff AX = Y \text{ är lösbar} \iff 0 = \frac{1}{2}y_1 + y_2 \iff y_1 + 2y_2 = 0.$$

Detta är ekvationen för ℓ (kolla själv), så $V_F = \ell$. För avbildningen G ger Gausselimination

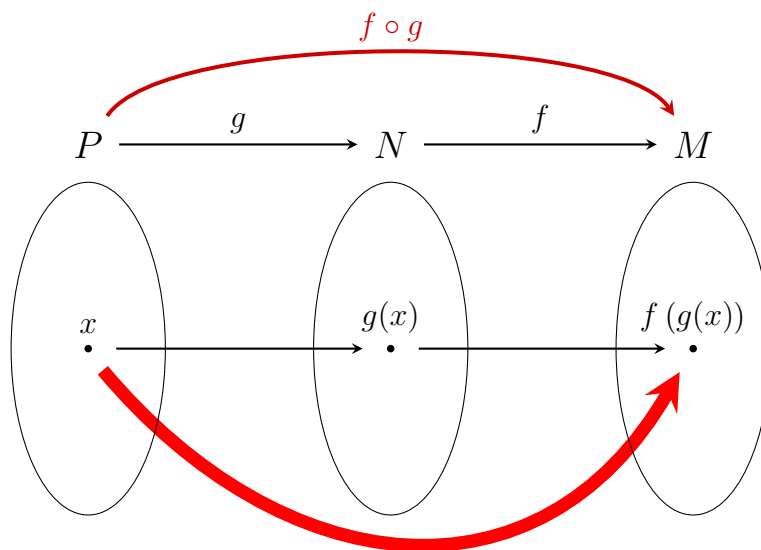
$$BX = Y \iff \begin{cases} \frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_2 = y_1 \\ -\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2 = y_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \left. \vphantom{\frac{3}{5}x_1} \right\} \frac{4}{3} \\ \left. \vphantom{-\frac{4}{5}x_1} \right\} \leftarrow \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} \left(\frac{3}{5}x_1\right) - \frac{4}{5}x_2 = y_1 \\ -\frac{5}{3}x_2 = \frac{4}{3}y_1 + y_2 \end{cases}$$

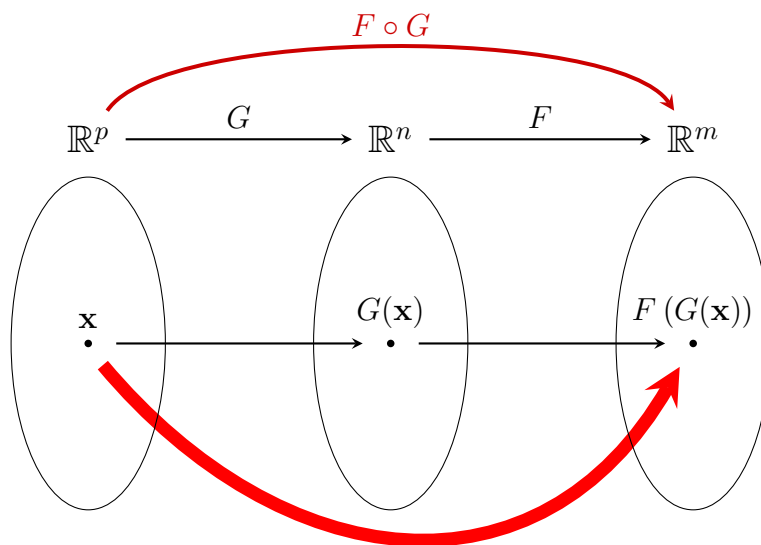
Då detta ekvationssystem är lösbart för alla (y_1, y_2) gäller alltså $V_G = \mathbb{R}^2$.

Observera att i efterklokhetens outhärdligt bländande ljus är det uppenbart att $V_F = \ell$ och $V_G = \mathbb{R}^2$ (tänk efter!).

Definition 4. Låt $g: P \rightarrow N$ och $f: N \rightarrow M$ vara avbildningar. Den *sammansatta* avbildningen $f \circ g: P \rightarrow M$ ges av $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ för $x \in P$.



Sats 8.4: Låt $G: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara linjära avbildningar med avbildningsmatriserna B och A respektive. Då är $F \circ G: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär med avbildningsmatris AB .



Bevis: Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} = G(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{z} = F(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m$. Vi har då

$$(F \circ G)(\mathbf{x}) = F(G(\mathbf{x})) = F(\mathbf{y}) = \mathbf{z}. \quad (1)$$

Låt X , Y och Z vara kolonnmatriserna motsvarande \mathbf{x} , \mathbf{y} och \mathbf{z} respektive. Ekvationen $\mathbf{y} = G(\mathbf{x})$ ger $Y = BX$ och ekvationen $\mathbf{z} = F(\mathbf{y})$ ger $Z = AY$. Vi har då

$$(AB)X = A(BX) = AY = Z. \quad (2)$$

Jämförelse av (1), (2) och Sats 8.1(i) visar då att $F \circ G$ är linjär med avbildningsmatris AB . ■

Anmärkning: Den avbildning/matris som används först står till höger. I ord säger Sats 8.4 att

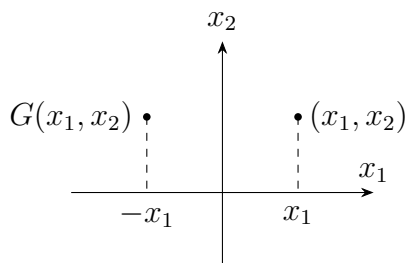
Avbildningsmatrisen för $F \circ G =$

$$(\text{Avbildningsmatrisen för } F) \cdot (\text{Avbildningsmatrisen för } G).$$

Exempel 11. Låt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara rotation vinkel θ moturs kring O och $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara spegling i x_2 -axeln. Bestäm avbildningsmatriserna för avbildningarna som ges av

- (i) Först spegling, sedan rotation.
- (ii) Först rotation, sedan spegling.

Lösning: F är linjär med avbildningsmatrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.



Figuren visar att $G(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$. På kolonnform fås

$$\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

så G är linjär med avbildningsmatrix $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sats 8.4 ger att

(i) Först spegling, sedan rotation: $F \circ G$ har avbildningsmatrix

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(ii) Först rotation, sedan spegling: $G \circ F$ har avbildningsmatrix

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Härav ses att om $\sin(\theta) \neq 0$ (dvs. om $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), gäller $F \circ G \neq G \circ F$ ty $AB \neq BA$.

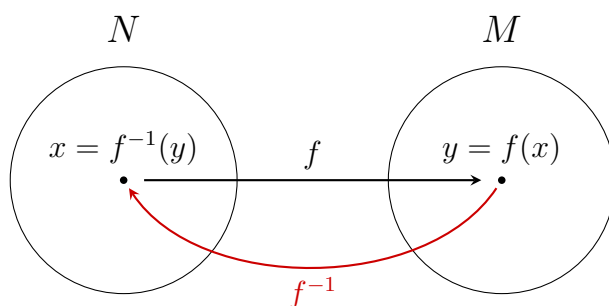
Exempel 12 (Exempel 6 igen). Låt ℓ vara linjen genom $O: (0, 0)$ med riktningvektor $\mathbf{v} = (2, -1)$. Låt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på ℓ och $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara spegling i ℓ . Då gäller

- (1) $F \circ F = F$: Först projektion, sedan projektion är samma som projektion.
- (2) $F \circ G = F$: Först spegling, sedan projektion är samma som projektion.
- (3) $G \circ F = F$: Först projektion, sedan spegling är samma som projektion.
- (4) $G \circ G = \text{Id}$: Först spegling, sedan spegling ger samma som vi började med.

Här är $\text{Id}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *identitetsavbildningen*, $\text{Id}(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Denna har avbildningsmatrisen $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ty $I \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Avbildningsmatriserna för F och G är $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ respektive. Enligt Sats 8.4 gäller alltså (kolla själv!)

- (1) $AA = A$ ty $F \circ F = F$.
- (2) $AB = A$ ty $F \circ G = F$.
- (3) $BA = A$ ty $G \circ F = F$.
- (4) $BB = I$ ty $G \circ G = \text{Id}$.

Definition 5. Låt $f: N \rightarrow M$ vara en avbildning. Om det för varje $y \in M$ finns *precis ett* $x \in N$ så att $f(x) = y$ kallas f *bijektiv*. I detta fall är *inversen till* f avbildningen $f^{-1}: M \rightarrow N$, $f^{-1}(y) = x$, där $x \in N$ är det entydigt bestämda element så att $f(x) = y$.



Sats 8.5: Låt $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatris A . Då gäller

$$F \text{ är bijektiv} \iff A \text{ är inverterbar (speciellt gäller } n = m).$$

I detta fall är F^{-1} linjär med avbildningsmatris A^{-1} .

Exempel 13 (Exempel 6 igen). Låt ℓ vara linjen genom $O: (0, 0)$ med riktningvektor $\mathbf{v} = (2, -1)$. Låt $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på ℓ och $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara spegling i ℓ .

För F gäller

$$V_F = \ell \neq \mathbb{R}^2 \implies F \text{ är inte bijektiv} \implies A \text{ är inte inverterbar.}$$

Vi kollar detta: Avbildningsmatrisen $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ har determinant

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25} - \frac{4}{25} = 0$$

och är därför *inte* inverterbar.

Avbildningen G är klart bijektiv med inversen $G^{-1} = G$. Alltså är avbildningsmatrisen $B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ inverterbar med inversen $B^{-1} = B$ (kolla själv detta).