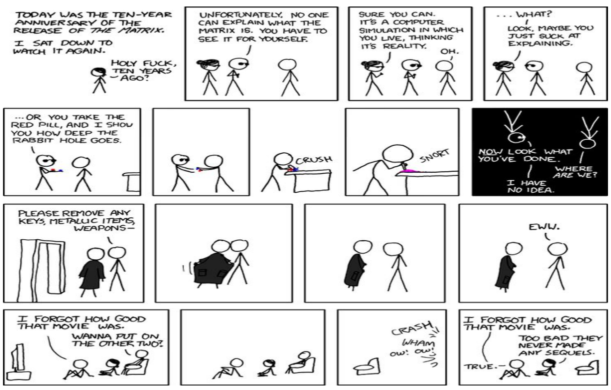
Linjär Algebra 2026

Kasper K. S. Andersen

8 maj 2026

Kapitel 7: Matriser

“If you want this Matrix, this is your only chance.”



“Unfortunately, no one can be told what The Matrix is. You’ll have to see it for yourself.”

Definition 1. En *matris* är ett rektangulärt talschema, t.ex.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \pi \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad 2 \text{ *rader*, } 3 \text{ *kolonner:* } 2 \times 3\text{–matris}$$

Allmänt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad m \text{ rader, } n \text{ kolonner: } m \times n\text{–matris}$$

Matriselementet a_{ij} finns på *plats* (i, j), dvs. rad i, kolonn j.

Specialfall

- *Radmatris*: $1 \times n$–matris, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$.
- *Kolonnmatris*: $m \times 1$–matris, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$
- *Kvadratisk matris*: $n \times n$–matris (dvs. $m = n$),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definition 2 (Addition av matriser). Om matriserna har samma storlek: Addition plats för plats, t.ex.

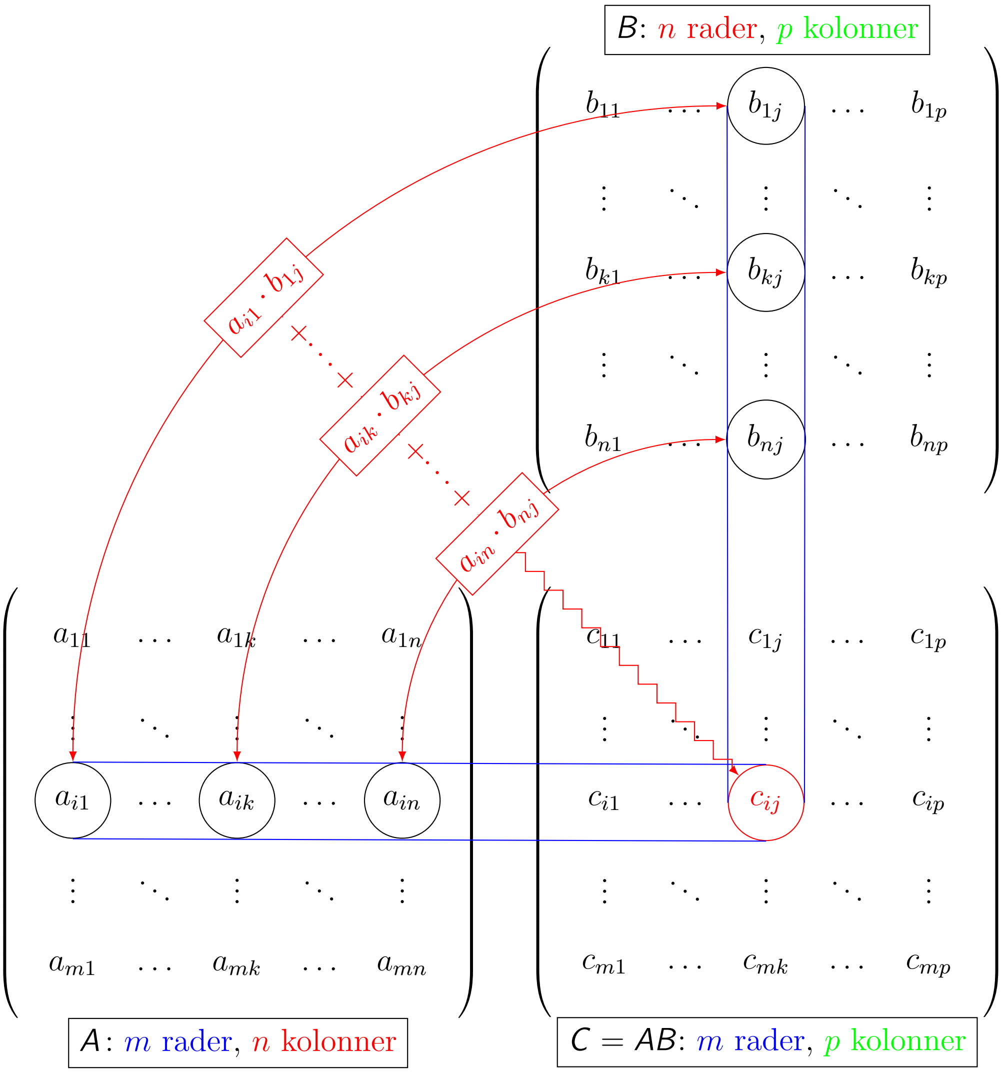
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & \pi \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+\pi \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 10 & 3+\pi \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Om A och B *inte* har samma storlek är $A + B$ odefinierad.

Definition 3 (Multiplikation med skalär). Multiplikation plats för plats, t.ex.

$$5\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 3\\ 5\cdot 4 & 5\cdot 5 & 5\cdot 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 10 & 15\\ 20 & 25 & 30\end{pmatrix}$$

Definition 4 (Matrismultiplikation). Låt A och B vara matriser. *Produktmatrisen* AB har på plats (i, j) skalärprodukten av *rad* i från A och *kolonn* j från B.



Detta fungerar endast om

$$\boxed{\text{Antalet kolonner i } A = \text{Antalet rader i } B}$$

$$\boxed{\underbrace{m \times n}_{A}\ \underbrace{n \times p}_{B} \Longrightarrow \underbrace{m \times p}_{AB}}$$

Om antalet kolonner i A *inte* är samma som antalet rader i B är AB odefinierad.

Exempel 1. Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ gäller $AB = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 18 \\ 5 & 28 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{cccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 2 \\ 0 & & & 3 \end{pmatrix}}^{\boxed{B:\ 2\times 2}} & & \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\boxed{A:\ 3\times 2}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 2 + 4\cdot 3 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 0 & 5\cdot 2 + 6\cdot 3 \end{pmatrix}}_{\boxed{AB:\ 3\times 2}} & = & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 18 \\ 5 & 28 \end{pmatrix}}_{\boxed{AB:\ 3\times 2}} \end{array}$$

Varningar. "$AB \neq BA$":

(1) A 3×2–matris, B 2×4–matris: AB 3×4–matris, BA odefinierad (AB finns, BA finns inte).

(2) A 3×2–matris, B 2×3–matris: AB 3×3–matris, BA 2×2–matris (båda AB och BA finns men har olika storlek).

(3) Om $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gäller

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ (nollmatrisen)} \qquad \text{och} \qquad BA = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Alltså finns båda AB och BA och dessa har samma storlek, men ändå gäller $AB \neq BA$. Vi har även $AB = 0$ men $A \neq 0$ och $B \neq 0$!

(4) Om $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ gäller

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & 2 \\ 36 & 4 \end{pmatrix} = AC.$$

Alltså är $AB = AC$ även om $B \neq C$ (man kan inte "dela med A på båda sidor av ekvationen").

Räknelagar

Sats 7.1 Om A, B och C är matriser (av passande storlek) och λ, μ är reella tal gäller:

(1) $A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$, $A+0=A$, $A+(-1)A=0$.

(2) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$, $1\cdot A=A$, $0\cdot A=0$, $\lambda 0=0$.

(3) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$, $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

(4) $A(BC)=(AB)C$, $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$.

(5) $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$ (finns inte i boken!)

Bevis: Läs själv, sida 121–122. ■

§7.3 Transponering

Definition 5. Om A är en $m\times n$–matris är *den transponerade matrisen* A^T den $n\times m$–matris som fås genom att ta A:s kolonner som raderna i A^T.

Exempel 2. Om $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ är $A^\mathsf{T}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$.

Anmärkning: Om A är *kvadratisk* fås A^T genom spegling i *huvuddiagonalen*

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\dots&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\qquad A^\mathsf{T}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\dots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&\dots&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

Definition 6. En matris A är *symmetrisk* om $A^\mathsf{T}=A$. (Observera att om A är symmetrisk måste A vara kvadratisk.)

Exempel 3.

$$\begin{pmatrix}3&4&6\\4&7&1\\6&1&9\end{pmatrix}\text{ är symmetrisk,}\qquad\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\text{ är inte symmetrisk.}$$

Sats 7.2 (Räknelagar) Om A och B är matriser och λ är ett reellt tal gäller:

(1) $(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A$,

(2) $(A + B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$,

(3) $(\lambda A)^{\mathsf{T}} = \lambda A^{\mathsf{T}}$,

(4) $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$.

Bevis: Läs själv, sida 124. ■

§7.4 Matriser och linjära ekvationssystem

Exempel 4. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & - \ x_3 & = & 3 \\ x_1 & - \ x_2 & +2x_3 & = & 6 \end{cases}$$

kan skrivas på flera olika sätt:

Matrisform: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Kolonnform: $$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vektorform: $$x_1(1, 1) + x_2(2, -1) + x_3(-1, 2) = (3, 6)$$

Allmänt gäller

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + \dots & +a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + \dots & +a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \dots & +a_{mn}x_n & = & y_m \end{cases} \iff$$

$$AX = Y \text{ där } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ och } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \iff$$

$$x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = Y \text{ där } A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{är } A\text{:s } \textit{kolonner} \text{ och } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \iff$$

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{y} \text{ där } \mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \ldots,$$
$$\mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \text{ är } A\text{:s } \textit{kolonnvektorer} \text{ och } \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$$
$$\text{(dessa är vektorer i } \mathbb{R}^m\text{).}$$

Bassatsen (Sats 6.3(ii)): Låt $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ vara n stycken vektorer i $\mathbb{R}^n$. Då gäller (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c) där

(a) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ är en *bas* i $\mathbb{R}^n$, dvs. varje vektor $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas på formen $\mathbf{y} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$ för *entydigt bestämda* reella tal $x_1, \ldots, x_n$.

(b) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ är *linjärt oberoende*, dvs. ekvationen $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ har endast den triviala lösningen $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

(c) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *spänner upp* $\mathbb{R}^n$, dvs. varje vektor $\mathbf{y}$ kan skrivas på formen $\mathbf{y} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$ för *några* reella tal $x_1, \ldots, x_n$.

Sats 7.3: För en *kvadratisk* matris A gäller (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c) där

(a) A:s kolonnvektorer är en bas.

(b) Ekvationen $AX = 0$ har endast den triviala lösningen $X = 0$.

(c) Ekvationen $AX = Y$ är lösbar för alla Y.

Bevis: Skriv matrisekvationerna på vektorform och använd Bassatsen. Läs själv, sida 127. ■

Exempel 5. Låt $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vi kollar villkoren i Sats 7.3.

(a) och (c): Gausselimination ger

$$AX = Y \iff \begin{cases} -5x_1 & +3x_2 & = & y_1 \\ 2x_1 & -\ x_2 & = & y_2 \end{cases} \quad \tfrac{2}{5}$$

$$\iff \begin{cases} -5x_1 & +3x_2 & = & y_1 \\ & \frac{1}{5}x_2 & = & \frac{2}{5}y_1 + y_2 \end{cases}$$

Återsubstitution ger en entydig lösning för alla Y.

(b): Beräkningarna ovan med $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ger

$$AX = Y \iff \begin{cases} -5x_1 & +3x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & -\ x_2 & = & 0 \end{cases} \ \tfrac{2}{5} \quad \iff \begin{cases} -5x_1 & +3x_2 & = & 0 \\ & \frac{1}{5}x_2 & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \iff X = 0.$$

Alltså har $AX = 0$ endast den triviala lösningen $X = 0$.

§7.5 Invers matris

Definition 7. En *enhetsmatris* är en kvadratisk matris av formen

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dvs. 1 i huvuddiagonalen och 0 på alla andra platser.

Anmärkning: I är alltid kvadratisk, storleken anpassas efter situationen.

Exempel 6.

$$\underbrace{I = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}}_{1\times 1}, \quad \underbrace{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 2}, \quad \underbrace{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3}, \quad \dots$$

Sats: Om A är en matris gäller $IA = A$ och $AI = A$.

Exempel 7. För $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ gäller

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A,$$

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$$

Definition 8. Låt A vara en $n \times n$–matris (*kvadratisk*). Om det finns en $n \times n$–matris B så att $AB = I$ och $BA = I$ kallas A *inverterbar* och B kallas A:s *invers*.

Lemma 7.2: Om A är inverterbar, då är inversen entydigt bestämd.

Bevis: Anta att båda B och C är inverser till A, dvs. det gäller att

$$AB = BA = I \text{ och } AC = CA = I.$$

Men då är

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. \quad \blacksquare$$

Notation: Om A är inverterbar skrivs A^{-1} för inversen till A.

Exempel 8. Med $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ gäller

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Alltså är A inverterbar med inversen $A^{-1} = B$.

Läs själv Exempel 7.4, sida 130.

Sats: För 2×2–matriser gäller

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ är inverterbar } \iff ad - bc \neq 0.$$

I detta fall är $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Anmärkning: Talet $ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ kallas A:s *determinant*. Vi återvänder till determinanter i Kapitel 9.

Exempel 9. Matrisen $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ är inverterbar då

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = 5 - 6 = -1 \neq 0.$$

Inversen blir $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (jmf. Exempel 8).

Sats 7.4: Om A och B är inverterbara matriser med samma storlek, då är A^{-1}, A^{T} och AB inverterbara med inverserna

(1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,

(2) $\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathsf{T}}$,

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bevis: Läs själv, sida 130–131. Vi bevisar (3):

$$\begin{aligned}
(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(B\left(B^{-1}A^{-1}\right)\right) = A\left(\left(BB^{-1}\right)A^{-1}\right) \\
&= A\left(IA^{-1}\right) = AA^{-1} = I, \\
\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) &= B^{-1}\left(A^{-1}(AB)\right) = B^{-1}\left(\left(A^{-1}A\right)B\right) \\
&= B^{-1}(IB) = B^{-1}B = I.
\end{aligned}$$

■

Läs själv Exempel 7.5, sida 131.

Om A är inverterbar kan man lösa det linjära ekvationssystemet $AX = Y$:

$$AX = Y \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}Y \iff X = A^{-1}Y$$

ty $A^{-1}(AX) = \left(A^{-1}A\right)X = IX = X$.

Sats 7.5: För en *kvadratisk* matris A gäller (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c) $\iff$ (d) där

(a) A:s kolonnvektorer är en bas.

(b) Ekvationen $AX = 0$ har endast den triviala lösningen $X = 0$.

(c) Ekvationen $AX = Y$ är lösbar för alla Y.

(d) A är inverterbar.

Bevis: (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) är Sats 7.3 ovan. Vi har just sett att (d) $\Longrightarrow$ (c). Beviset för (c) $\Longrightarrow$ (d) ingår inte. ■

Vi vet alltså att

$$\boxed{AX = Y \text{ är lösbart för alla } Y \Longrightarrow A \text{ är inverterbar och } X = A^{-1}Y}$$

Exempel 10. Bestäm inversen till $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ om den finns.

Lösning: Gausselimination ger

$$AX = Y \Longleftrightarrow \begin{cases} -5x_1 & +3x_2 & = & y_1 & \\ 2x_1 & - \ x_2 & = & & y_2 \end{cases} \quad \tfrac{2}{5} \quad (\cdot - \tfrac{1}{5}) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 & -\frac{3}{5}x_2 & = & -\frac{1}{5}y_1 & \\ & \frac{1}{5}x_2 & = & \frac{2}{5}y_1 & +y_2 \end{cases} \quad 3 \quad (\cdot 5) \quad \begin{cases} x_1 & & = & y_1 & +3y_2 \\ & x_2 & = & 2y_1 & +5y_2 \end{cases}$$

Vi har alltså

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{AX=Y} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{X=A^{-1}Y}$$

Vi ser att $AX = Y$ är lösbart för alla Y. Därför är A inverterbar med inversen

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (jmf. Exempel 8 och Exempel 9).

Anmärkning: Kolla alltid att $AA^{-1} = I$ (och att $A^{-1}A = I$).

Läs själv Exempel 7.6, sida 134–135.

Exempel 11. Bestäm inversen till $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ om den finns.

Lösning: Gausselimination ger

$$\mathsf{A}\mathsf{X} = \mathsf{Y} \iff \begin{cases} -6x_1 & +3x_2 & = & y_1 & \\ \ \ 2x_1 & -\ x_2 & = & & y_2 \end{cases} \quad \tfrac{1}{3}$$

$$\iff \begin{cases} -6x_1 & +3x_2 & = & y_1 & \\ & 0 & = & \frac{1}{3}y_1 & +y_2 \end{cases}$$

dvs. $\mathsf{A}\mathsf{X} = \mathsf{Y}$ är lösbart $\iff \frac{1}{3}y_1 + y_2 = 0$. Alltså är $\mathsf{A}\mathsf{X} = \mathsf{Y}$ inte lösbart för *alla* Y, så A är *inte* inverterbar.

Alternativ metod (A är en 2×2–matris): Determinanten är

$$\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0$$

så A är *inte* inverterbar.

Läs själv Exempel 7.7, sida 135 och Anmärkningar, sida 135–136. §7.6–§7.7 ingår inte.