

Linjär Algebra 2026

Kasper K. S. Andersen

8 maj 2026

Kapitel 6: Rummet \mathbb{R}^n

Om man har valt en bas för vektorerna i rummet använder vi taltripplar (x_1, x_2, x_3) i stället för vektorer. Räkneoperationerna ges av

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Definition 1. \mathbb{R}^n är mängden av alla n -tupler (x_1, x_2, \dots, x_n) av reella tal. Räkneoperationerna *definieras* av

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

En n -tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) skrivs som \mathbf{x} och kallas en *vektor* i \mathbb{R}^n . *Nollvektorn* är $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Sats 6.1. Räknelagarna i \mathbb{R}^n är de samma som för geometriska vektorer (Sats 2.1, sida 23): För vektorer \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} och reella tal λ , μ gäller räknelagarna

- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$,
- $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$,
- $\mathbf{x} + ((-1)\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,
- $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$,
- $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$ och
- $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$.

Läs själv Exempel 6.1, sida 98.

§6.2 Bas i \mathbb{R}^n

Begreppen *linjärt beroende/oberoende* definieras ordagrant som för geometriska vektorer:

Definition 2. Vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ kallas *linjärt oberoende* om ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

endast har triviella lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$. Annars kallas $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ *linjärt beroende*.

Definition 3. Vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ sägs *spänna upp* \mathbb{R}^n om varje vektor \mathbf{y} kan skrivas på formen $\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{u}_p$ för passande val av koefficienter $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

Definition 4. Vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ kallas en *bas i* \mathbb{R}^n om varje vektor \mathbf{y} kan skrivas på formen $\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{u}_p$ med **entydigt bestämda** koefficienter $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. I detta fall kallas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ för \mathbf{y} :s *koordinater* med avseende på basen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$.

Sagt annorlunda gäller

$$\text{Vektorerna } \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \left\{ \begin{array}{l} \text{är linjärt oberoende/} \\ \text{spänner upp } \mathbb{R}^n / \\ \text{är en bas i } \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \text{ om}$$
$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_p \mathbf{u}_p \text{ har } \left\{ \begin{array}{l} \text{högst/} \\ \text{minst/} \\ \text{precis} \end{array} \right\} \text{ en lösning för alla } \mathbf{y} \text{ i } \mathbb{R}^n$$

Exempel 1. Enligt föreläsningssanteckningarna (Kapitel 2, Exempel 7) är vektorerna $\mathbf{u}_1 = (-5, 2)$ och $\mathbf{u}_2 = (3, -1)$ linjärt oberoende. Spänner de upp \mathbb{R}^2 ? Utgör de en bas för \mathbb{R}^2 ?

Lösning: Vi betraktar ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{y} \tag{1}$$

där $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Beräkning ger

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{y} &\iff \lambda_1(-5, 2) + \lambda_2(3, -1) = \mathbf{y} \\ &\iff \begin{cases} -5\lambda_1 + 3\lambda_2 = y_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = y_2 \end{cases} \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{cases} -5\lambda_1 + 3\lambda_2 = y_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = y_2 \end{cases}} \right\} \frac{2}{5} \\ \leftarrow \end{array} \\ &\iff \begin{cases} \textcircled{-5\lambda_1} + 3\lambda_2 = y_1 \\ \textcircled{\frac{1}{5}\lambda_2} = \frac{2}{5}y_1 + y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Det finns därför lösning till ekvationssystemet (1) för alla \mathbf{y} , dvs. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ spänner upp \mathbb{R}^2 . Lösningen blir även entydig, dvs. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ är en bas för \mathbb{R}^2 .

Exempel 2. Enligt föreläsninganteckningarna (Kapitel 2, Exempel 8) är vektorerna $\mathbf{u}_1 = (-6, 2)$ och $\mathbf{u}_2 = (3, -1)$ linjärt beroende. Spänner de upp \mathbb{R}^2 ? Utgör de en bas för \mathbb{R}^2 ?

Lösning: Vi betraktar ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{y} \tag{2}$$

där $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Beräkning ger

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{y} &\iff \lambda_1(-6, 2) + \lambda_2(3, -1) = \mathbf{y} \\ &\iff \begin{cases} -6\lambda_1 + 3\lambda_2 = y_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = y_2 \end{cases} \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{cases} -6\lambda_1 + 3\lambda_2 = y_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = y_2 \end{cases}} \right\} \frac{1}{3} \\ \leftarrow \end{array} \\ &\iff \begin{cases} \textcircled{-6\lambda_1} + 3\lambda_2 = y_1 \\ 0 = \frac{1}{3}y_1 + y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Det finns därför *inte* lösning till ekvationssystemet (2) för alla \mathbf{y} , t.ex. inte för $\mathbf{y} = (1, 0)$ då $\frac{1}{3}y_1 + y_2 = \frac{1}{3} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{3} \neq 0$. Vi konkluderar därför att $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ *inte* spänner upp \mathbb{R}^2 . Därför är $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ inte heller en bas för \mathbb{R}^2 .

Exempel 3. (Standardbasen för \mathbb{R}^n) Vektorerna $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ och $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ är en bas för \mathbb{R}^3 kallad *standardbasen*. Enligt definitionen ska vi bevisa att varje vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ är en linjärkombination $\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3$ med *entydigt bestämda* koefficienter λ_1, λ_2 och λ_3 . Om $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ gäller

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{y} \iff \begin{cases} \textcircled{\lambda_1} & = y_1 \\ & \textcircled{\lambda_2} & = y_2 \\ & & \textcircled{\lambda_3} & = y_3 \end{cases}$$

Koefficienterna $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är alltså entydigt bestämda, och $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är därför en bas för \mathbb{R}^3 . På samma sätt ses att vektorerna

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

är en bas för \mathbb{R}^n .

Sats 6.3 (Bassatsen). Låt $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ vara vektorer i \mathbb{R}^n . Då gäller

- (i) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ är en bas för $\mathbb{R}^n \implies p = n$.
- (i') $p \neq n \implies \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ är inte en bas för \mathbb{R}^n .
- (ii) Om $p = n$ gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \text{ är en bas för } \mathbb{R}^n &\iff \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \text{ är linjärt oberoende} \\ &\iff \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \text{ spänner upp } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

- (iii) $p > n \implies \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ är linjärt beroende.
- (iii') $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ är linjärt oberoende $\implies p \leq n$.
- (iv) $p < n \implies \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ spänner inte upp \mathbb{R}^n .
- (iv') $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ spänner upp $\mathbb{R}^n \implies p \geq n$.

Läs själv Exempel 6.2, sida 99, Exempel 6.3–6.4, sida 100–103 och Exempel 6.5 sida 103–104.

“Teori för \mathbb{R}^n ”, §6.3, läsas kursoriskt.

§6.4: Skalärprodukt

För $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ definieras *skalärprodukten*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Definition 5. Längden $|\mathbf{x}|$ av en vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ är

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Två vektorer \mathbf{x}, \mathbf{y} är *ortogonal/vinkelräta* om $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. I så fall skrivs $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Sats 6.2. De vanliga räknelagar för skalärprodukten (Sats 4.2, sida 66) gäller också i \mathbb{R}^n : Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ och λ en skalär. Då gäller:

(1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$.

(2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$.

(3) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$, $(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{x}$.

(4) $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

Läs själv Exempel 6.6–6.7, sida 109.