Linjär Algebra 2026

Kasper K. S. Andersen

8 maj 2026

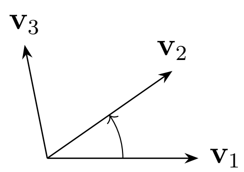
Kapitel 5: Vektorprodukt

Anmärkning: Vektorprodukt finns endast i rummet (3D), inte i planet (2D).

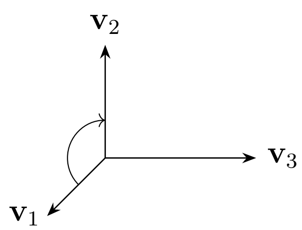
Orientering

Definition 1. Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vara 3 vektorer i rummet som inte ligger i samma plan (dvs. en bas). Vi tittar från spetsen av $\mathbf{v}_3$ på planet som innehåller $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Vi delar i två fall.

FALL 1. $\mathbf{v}_1$ ligger till höger och $\mathbf{v}_2$ ligger till vänster: Basen $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ kallas *positivt orienterad* eller *högerorienterad*. Minsta vridningen från $\mathbf{v}_1$ till $\mathbf{v}_2$ sker moturs.



FALL 2. $\mathbf{v}_1$ ligger till vänster och $\mathbf{v}_2$ ligger till höger: Basen $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ kallas *negativt orienterad* eller *vänsterorienterad*. Minsta vridningen från $\mathbf{v}_1$ till $\mathbf{v}_2$ sker medurs.



Alternativ definition: $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ är *positivt orienterade* om riktningarna går att beskriva med tummen, pekfingret och långfingret (i denna ordning) på *höger* hand. Annars är $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ *negativt orienterade*.

Läs själv "Orientering", sida 81–83.

Definition 2 (Definition 5.2)*.* Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vara två vektorer i rummet. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ *inte* är parallella är *vektorprodukten* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ den entydigt bestämda vektorn i rummet så att

(1) $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin([\mathbf{u}, \mathbf{v}])$,

(2) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$,

(3) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är positivt orienterade.

Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella definieras $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Anmärkning: Skalärprodukten $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ är en skalär, vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är en vektor.

Räknelagar

Sats 5.4:

(1) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ är parallella.

(2) $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

(3) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, $\quad (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$.

(4) $(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

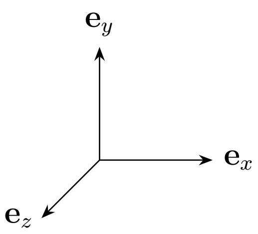
Bevis: Läs själv, sida 87–88. ■

Exempel 1 (=Exempel 5.2)*.* Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i rummet gäller:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u} - \mathbf{v} \times \mathbf{v} \\ &= \mathbf{0} - \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{0} \\ &= -2\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Vektorprodukt i ortonormerade baser

Låt $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ vara en *positivt orienterad ortonormerad bas* i rummet = HON-bas (Högerorienterad och OrtoNormerad bas). Då gäller (se figur, använd höger hand):



$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{0}$,	$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$,	$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y$,
$\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z$,	$\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{0}$,	$\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x$,
$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$,	$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x$,	$\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$.

Sats 5.5: Om $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ med avseende på en HON-bas $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, då gäller

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Bevis: Sats 5.4 och tabellen ovan ger

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (x_1\mathbf{e}_x + y_1\mathbf{e}_y + z_1\mathbf{e}_z) \times (x_2\mathbf{e}_x + y_2\mathbf{e}_y + z_2\mathbf{e}_z) \\
&= x_1x_2(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x) + x_1y_2(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) + x_1z_2(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z) \\
&\quad + y_1x_2(\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x) + y_1y_2(\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y) + y_1z_2(\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z) \\
&\quad + z_1x_2(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x) + z_1y_2(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y) + z_1z_2(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z) \\
&= x_1x_2 \cdot \mathbf{0} + x_1y_2 \cdot \mathbf{e}_z + x_1z_2 \cdot (-\mathbf{e}_y) \\
&\quad + y_1x_2 \cdot (-\mathbf{e}_z) + y_1y_2 \cdot \mathbf{0} + y_1z_2 \cdot \mathbf{e}_x \\
&\quad + z_1x_2 \cdot \mathbf{e}_y + z_1y_2 \cdot (-\mathbf{e}_x) + z_1z_2 \cdot \mathbf{0} \\
&= (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{e}_x + (-x_1z_2 + z_1x_2)\mathbf{e}_y + (x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Minnesregel: För tal a, b, c, d definieras *determinanten*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Då gäller (observera tecknen!)

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \left(+ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Läs själv Exempel 5.3, sida 89 och Exempel 5.4, sida 91.

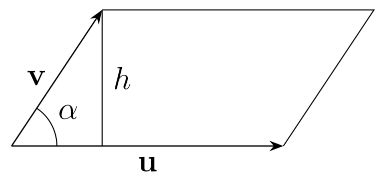
Geometriska tillämpningar av vektorprodukten

Alla baser som används nedan är HON-baser.

Area

Sats 5.1: Arean av parallellogrammen som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

Bevis: Vi delar i två fall.
FALL 1. $0 \leq [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \leq \frac{\pi}{2}$: Enligt figuren gäller $\sin(\alpha) = \frac{h}{|\mathbf{v}|}$ och $\alpha = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.



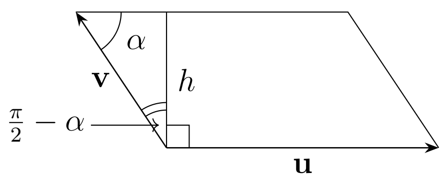
Arean ges alltså av

$$\text{area} = \text{bas} \cdot \text{höjd} = |\mathbf{u}|h = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin(\alpha) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

FALL 2. $\frac{\pi}{2} \leq [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \leq \pi$: I detta fall är $\sin(\alpha) = \frac{h}{|\mathbf{v}|}$ och

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{2} = \pi - \alpha$$

vilket ger $\alpha = \pi - [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.



Arean ges alltså av

$$\begin{aligned}\text{area} &= \text{bas} \cdot \text{höjd} = |\mathbf{u}|h = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\alpha) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\pi - [\mathbf{u},\mathbf{v}]) \\ &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin([\mathbf{u},\mathbf{v}]) = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}|.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exempel 2. Bestäm arean av parallellogrammen som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = (5, 1, -2)$ och $\mathbf{v} = (-1, -2, 2)$.

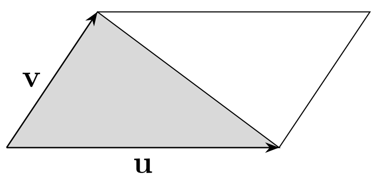
Lösning: Vektorprodukten är

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= (5,1,-2)\times(-1,-2,2) \\ &= \left(+ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (2-4, -(10-2), -10-(-1)) \\ &= (-2,-8,-9),\end{aligned}$$

vilket ger arean

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| &= |(-2,-8,-9)| = \sqrt{(-2)^2+(-8)^2+(-9)^2} \\ &= \sqrt{4+64+81} = \sqrt{149}.\end{aligned}$$

Anmärkning: Arean av en *triangel* med sidorna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är hälften av parallellogramarean, dvs. $\frac{1}{2}|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$.



Läs Exempel 5.5, sida 91–92.

Anmärkning Om $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ och $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ är vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan dessa tolkas som vektorer i $\mathbb{R}^3$ genom att betrakta vektorerna $\mathbf{u}' = (x_1, y_1, 0)$ och $\mathbf{v}' = (x_2, y_2, 0)$. Arean av parallellogrammen som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ blir då $|\mathbf{u}' \times \mathbf{v}'|$. Beräkning ger

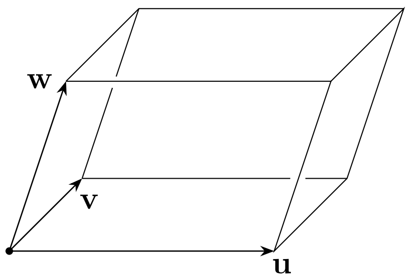
$$\begin{aligned}
\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' &= (x_1, y_1, 0) \times (x_2, y_2, 0) \\
&= \left(+ \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= \left(0, 0, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= (0, 0, x_1 y_2 - y_1 x_2).
\end{aligned}$$

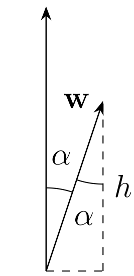
Parallellogramarean blir alltså

$$|\mathbf{u}' \times \mathbf{v}'| = |(0, 0, x_1 y_2 - y_1 x_2)| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2} = |x_1 y_2 - y_1 x_2|$$

Volym

Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vara 3 vektorer i rummet. Dessa spänner upp en *parallellepiped* (sned låda).





Volymen ges av

$$\text{volym} = \text{basarea} \cdot \text{höjd} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| h.$$

Om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är positivt orienterade gäller $\cos(\alpha) = \frac{h}{|\mathbf{w}|}$ och $\alpha = [\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ vilket ger

$$\begin{aligned}
\text{volym} &= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| h \\
&= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos(\alpha) \\
&= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos\left([\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w}]\right) \\
&= \underbrace{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}}_{\text{skalär trippelprodukt}}
\end{aligned}$$

Om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är negativt orienterade fås igen $\cos(\alpha) = \frac{h}{|\mathbf{w}|}$ men nu är $\alpha = \pi - [\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ varför volymen ges av $-(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

Om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ ligger i samma plan gäller $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \perp \mathbf{w}$ och $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$. I detta fall är volymen av "parallellepipeden" 0.

Vi konkluderar att i alla fall gäller

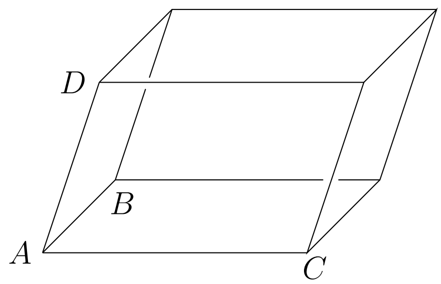
$$\boxed{\text{Volymen av parallellepipeden som spänns upp av } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}$$

Dessutom gäller

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ är en } \textit{positivt} \text{ orienterad bas } &\iff (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} > 0, \\
\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ är en } \textit{negativt} \text{ orienterad bas } &\iff (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} < 0. \\
\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ ligger i samma plan } &\iff (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0.
\end{aligned}$$

Läs själv Sats 5.3, sida 86 om skalär trippelprodukt.

Exempel 3. Bestäm volymen av parallellepipeden med hörn i punkterna $A\colon (2, 1, -1)$, $B\colon (0, 3, 3)$, $C\colon (-1, -2, 0)$ och $D\colon (-3, 0, 0)$ som i figuren nedan.



Lösning: Låt $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (-2, 2, 4)$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = (-3, -3, 1)$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{AD} = (-5, -1, 1)$. Då gäller

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (-2, 2, 4) \times (-3, -3, 1) \\
&= \left(+ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \right) \\
&= \Big(2 - (-12), - (-2 - (-12)), 6 - (-6) \Big) \\
&= (14, -10, 12),
\end{aligned}$$

vilket ger

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (14, -10, 12) \cdot (-5, -1, 1) = -70 + 10 + 12 = -48.$$

Alltså är $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ negativt orienterade och volymen av parallellepipeden är $|-48| = 48$.

Affin ekvation för ett plan

Exempel 4. Bestäm en ekvation på affin form för planet π_1 som innehåller punkten $P_1\colon (3,-2,-5)$ och har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = (-1,-1,1)$ och $\mathbf{v}_2 = (1,-3,-3)$.

Lösning: Då

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (-1,-1,1) \times (1,-3,-3) \\
&= \left(+ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right) \\
&= (3-(-3), -(3-1), 3-(-1)) \\
&= (6,-2,4) \\
&= 2(3,-1,2),
\end{aligned}$$

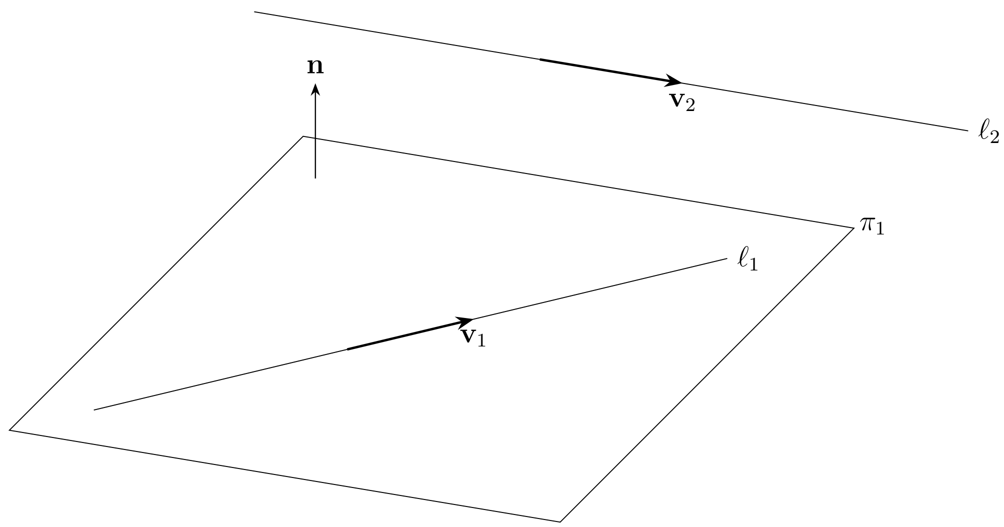
är $\mathbf{n} = (3,-1,2)$ en normalvektor till π_1. Planet har alltså den affina ekvationen $\pi_1\colon 3x - y + 2z + d = 0$ för något d. Punkten $P_1\colon (3,-2,-5)$ ligger på π_1, vilket ger $3 \cdot 3 - (-2) + 2 \cdot (-5) + d = 0$. Detta ger $d = -1$, dvs. $\pi_1\colon 3x - y + 2z - 1 = 0$. Observera att detta stämmer med Kapitel 3, Exempel 8.

Avståndet mellan två linjer i rummet

Exempel 5. Bestäm minsta avståndet mellan linjerna

$\ell_1\colon (x,y,z) = (3-t, -2-t, -5+t)$ och $\ell_2\colon (x,y,z) = (1+t, 2-3t, 3-3t)$.

Lösning: Linjerna ℓ_1 och ℓ_2 har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = (-1,-1,1)$ och $\mathbf{v}_2 = (1,-3,-3)$. Då $\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2$ är linjerna inte parallella.



Därför finns ett entydigt bestämt plan π_1 som innehåller ℓ_1 och är parallell med ℓ_2 (jmf. uppgift 3.24). Avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2 är då samma som avståndet mellan π_1 och en godtycklig punkt på ℓ_2. Detta avstånd fås sedan från Avståndsformeln.

Planet har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ och går genom $P_1\colon (3,-2,-5)$. Enligt Exempel 4 gäller $\pi_1\colon 3x - y + 2z - 1 = 0$. Observera att punkten $P_2\colon (1,2,3)$ ligger på ℓ_2. Avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2 är alltså samma som avståndet mellan π_1 och P_2. Detta avstånd ges enligt Avståndsformeln av

$$\frac{|3\cdot 1 - 2 + 2\cdot 3 - 1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|3-2+6-1|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{|6|}{\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{7}.$$

Läs själv Exempel 5.6, sida 92–93. Exempel 5.1, sida 84 och §5.6: Vektoriell trippelprodukt ingår inte.