

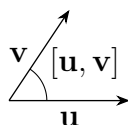
Linjär Algebra 2026

Kasper K. S. Andersen

8 maj 2026

Kapitel 4: Skalarprodukt

Definition 1. Om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ är två vektorer, då betecknar $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ *minsta* vinkeln mellan \mathbf{u} och \mathbf{v} . Observera att $0 \leq [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \leq \pi$.



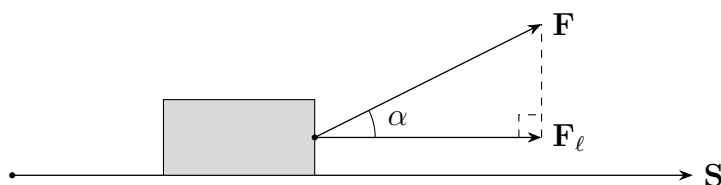
Definition 2. För två vektorer \mathbf{u}, \mathbf{v} definieras *skalärprodukten* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ enligt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) & \text{om } \mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{om } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ eller } \mathbf{v} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Exempel 1. Om $|\mathbf{u}| = 2$, $|\mathbf{v}| = 3$ och $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \frac{\pi}{3}$ gäller

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) = 2 \cdot 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Motiverande exempel: arbetet som utförs när en kropp förflyttas en sträcka \mathbf{S} av en kraft \mathbf{F} :



Arbetet ges per definition av $W = |\mathbf{F}_\ell||\mathbf{S}|$. Vi har $\cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{F}_\ell|}{|\mathbf{F}|}$ och $\alpha = [\mathbf{S}, \mathbf{F}]$ varav

$$|\mathbf{F}_\ell| = |\mathbf{F}| \cos(\alpha) = |\mathbf{F}| \cos([\mathbf{S}, \mathbf{F}]).$$

Insättning ger att arbetet ges av skalärprodukten:

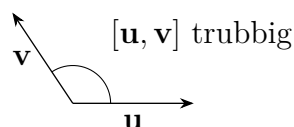
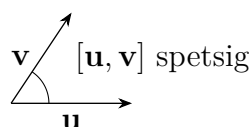
$$W = |\mathbf{F}_\ell||\mathbf{S}| = |\mathbf{F}| \cos([\mathbf{S}, \mathbf{F}]) |\mathbf{S}| = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}.$$

Från definitionen följer

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0 \iff 0 \leq [\mathbf{u}, \mathbf{v}] < \frac{\pi}{2} \iff [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \text{ är spetsig.}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0 \iff \frac{\pi}{2} < [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \leq \pi \iff [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \text{ är trubbig.}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ eller } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ eller } [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \frac{\pi}{2}.$$



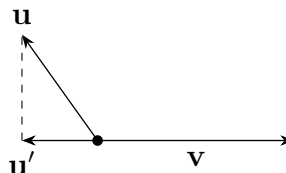
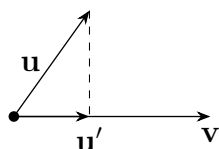
Definition 3. Om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ kallas \mathbf{u} och \mathbf{v} *ortogonala* eller *vinkelräta*. Detta skrivs $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Vi har alltså

$$\boxed{\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.}$$

Definition 4 (Ortogonal projektion). Låt $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och \mathbf{u} vara vektorer. Vi definierar

$$\mathbf{u}' = \text{ortogonala projektionen av } \mathbf{u} \text{ på } \mathbf{v}$$

enligt figurerna



Om $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ definieras $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$.

Sats 4.1 (Projektionsformeln): Den ortogonala projektionen \mathbf{u}' av \mathbf{u} på \mathbf{v} ges av

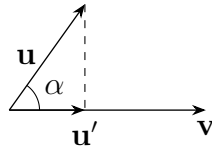
$$\mathbf{u}' = \underbrace{\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right)}_{\text{tal}} \mathbf{v}.$$

Bevis: Vi delar i 3 fall:

FALL 1. $\mathbf{u} = \mathbf{0}$: VL = $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$.

$$\text{HL} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{0} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

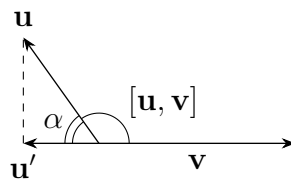
FALL 2: $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $0 \leq [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \leq \frac{\pi}{2}$.



Vi har $\cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{u}'|}{|\mathbf{u}|}$ och $\alpha = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Alltså är

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} &= \left(\frac{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos([\mathbf{u}, \mathbf{v}])}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{|\mathbf{u}| \cos([\mathbf{u}, \mathbf{v}])}{|\mathbf{v}|} \right) \mathbf{v} \\ &= (|\mathbf{u}| \cos(\alpha)) \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \right) \\ &= |\mathbf{u}'| \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \right) \\ &= \mathbf{u}'. \end{aligned}$$

FALL 3: $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\frac{\pi}{2} \leq [\mathbf{u}, \mathbf{v}] \leq \pi$.



Vi har $\cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{u}'|}{|\mathbf{u}|}$ och $\alpha = \pi - [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Alltså är

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} &= \left(\frac{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos([\mathbf{u}, \mathbf{v}])}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} \\ &= \left(\frac{|\mathbf{u}| \cos([\mathbf{u}, \mathbf{v}])}{|\mathbf{v}|} \right) \mathbf{v} \\ &= (|\mathbf{u}| \cos(\pi - \alpha)) \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \right) \\ &= (-|\mathbf{u}| \cos(\alpha)) \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \right) \\ &= -|\mathbf{u}'| \left(\frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \right) \\ &= \mathbf{u}'. \end{aligned}$$

■

Räknelagar

Sats 4.2: Låt \mathbf{u} , \mathbf{v} och \mathbf{w} vara vektorer och λ en skalär. Då gäller:

$$(1) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2.$$

$$(2) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

$$(3) \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \quad (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}.$$

$$(4) (\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}).$$

Bevis: (1) och (2) följer direkt från definitionen. (3) och (4) bevisas geometriskt, jmf. sida 66–67. ■

Exempel 2. Anta att $|\mathbf{u}| = 2$, $|\mathbf{v}| = 3$ och $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \frac{\pi}{3}$. Då gäller

$$\begin{aligned} (\mathbf{2u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) &\stackrel{(3)}{=} 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\ &\stackrel{(1),(2)}{=} 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 2|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 2|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \\ &= 3 - 2 \cdot 2^2 + 3^2 \\ &= 4, \end{aligned}$$

då $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3$ enligt Exempel 1.

Läs själv Exempel 4.3–4.5, sida 67–68.

Ortonormerade baser

Definition 5. Om vektorerna \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z i rummet (3D) har längd 1 och är ortogonala mot varandra, sägs \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z vara en *ortonormerad bas* (ON-bas). Ett val av origo O ger ett *ortonormerat koordinatsystem* $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$. Motsvarande definitioner gäller i planet (2D).

Anmärkning: En ortonormerad bas är en bas: Anta att \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z är en ortonormerad bas. Vi måste visa att \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z inte ligger i samma plan vilket enligt Bassatsen (Sats 2.4), del (2), är ekvivalent med att visa att \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z är linjärt oberoende. Anta att

$$\lambda_x \mathbf{e}_x + \lambda_y \mathbf{e}_y + \lambda_z \mathbf{e}_z = \mathbf{0}, \tag{1}$$

vi måste då bevisa att $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$. Skalarprodukten av (1) med \mathbf{e}_x ger

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{e}_x \\ &= (\lambda_x \mathbf{e}_x + \lambda_y \mathbf{e}_y + \lambda_z \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_x \\ &= \lambda_x (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x) + \lambda_y (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x) + \lambda_z (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x) \\ &= \lambda_x \cdot 1 + \lambda_y \cdot 0 + \lambda_z \cdot 0 \\ &= \lambda_x. \end{aligned}$$

Vi har i nästsista steg använt att $|\mathbf{e}_x| = 1$ vilket ger $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = |\mathbf{e}_x|^2 = 1$ och att $\mathbf{e}_y \perp \mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_z \perp \mathbf{e}_x$ vilket innebär att $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0$. Alltså gäller $\lambda_x = 0$. På samma sätt bevisas $\lambda_y = \lambda_z = 0$. ■

Sats 4.3: Låt $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ och $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ med avseende på en ON-bas $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ i planet. Då gäller:

$$(1) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

$$(2) \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Motsvarande gäller i rummet (3D).

Bevis. (1): Vi har $\mathbf{u} = x_1 \mathbf{e}_x + y_1 \mathbf{e}_y$ och $\mathbf{v} = x_2 \mathbf{e}_x + y_2 \mathbf{e}_y$. Som i anmärkningen ovan gäller

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1, \quad \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0.$$

Direkt uträkning ger nu

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x_1 \mathbf{e}_x + y_1 \mathbf{e}_y) \cdot (x_2 \mathbf{e}_x + y_2 \mathbf{e}_y) \\ &= x_1 x_2 (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x) + x_1 y_2 (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y) + y_1 x_2 (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x) + y_1 y_2 (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y) \\ &= x_1 x_2 \cdot 1 + x_1 y_2 \cdot 0 + y_1 x_2 \cdot 0 + y_1 y_2 \cdot 1 \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2. \end{aligned}$$

(2): Enligt (1) gäller

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (x_1, y_1) \cdot (x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2$$

vilket ger $|\mathbf{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. ■

Läs själv Sats 4.4 med bevis, sida 71–72. “Basbyten vid ortonormerade baser”, sida 72–73 ingår inte.

Geometriska tillämpningar av skalärprodukten

I alla exempel nedan är alla baser och koordinatsystem ortonormerade.

Avstånd mellan två punkter

Exempel 3. Avståndet mellan punkterna $P_1: (1, 0, 2)$ och $P_2: (2, -1, 2)$ ges av

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = |(2 - 1, -1 - 0, 2 - 2)| = |(1, -1, 0)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

Minsta vinkeln mellan två vektorer

Exempel 4. Bestäm minsta vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1, 1, -2)$ och $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$.

Lösning: Formeln $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos([\mathbf{u}, \mathbf{v}])$ ger

$$\begin{aligned} \cos([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \\ &= \frac{(1, 1, -2) \cdot (1, 0, -1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

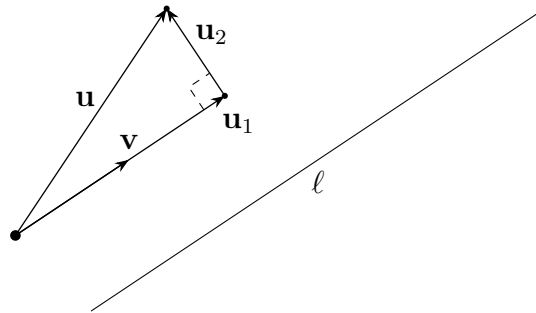
vilket ger $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Läs Exempel 4.6–4.7, sida 70–71 och Exempel 4.9, sida 74.

Definition 6. Om $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ kallas \mathbf{u}_1 och \mathbf{u}_2 för \mathbf{u} :s *komponenter*.

Exempel 5. Dela upp vektorn $\mathbf{u} = (2, 6)$ i två vinkelräta komponenter varav den ena är parallell med linjen $\ell: (x, y) = (3 + 2t, 5 + t)$ och den andra är ortogonal mot ℓ .

Lösning: Linjen ℓ har riktningsvektor $\mathbf{v} = (2, 1)$. Låt \mathbf{u}_1 vara ortogonal projektionen av \mathbf{u} på \mathbf{v} och $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$.

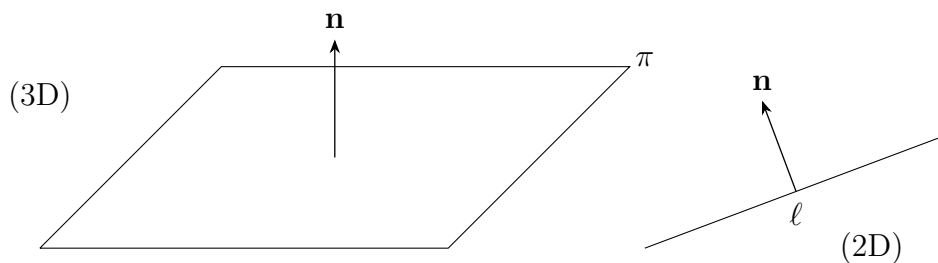


Beräkning m.h.a. Projektionsformeln ger

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} = \left(\frac{(2, 6) \cdot (2, 1)}{|(2, 1)|^2} \right) (2, 1) \\ &= \left(\frac{2 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{2^2 + 1^2} \right) (2, 1) = \frac{10}{5} (2, 1) = (4, 2), \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = (2, 6) - (4, 2) = (-2, 4). \end{aligned}$$

Planets normalriktning

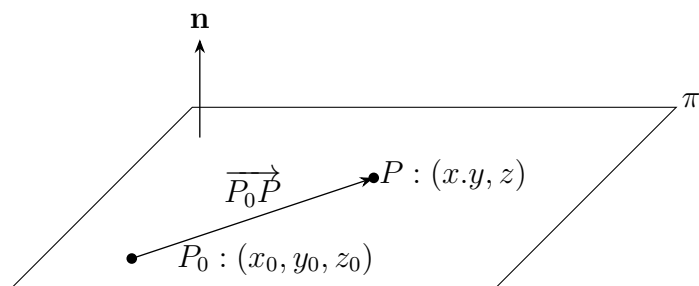
Definition 7. En vektor $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ som är ortogonal mot ett plan π i rummet kallas en *normalvektor* till π . Motsvarande definition gäller för linjer i planet.



Sats 4.5.

- (1) Låt $\pi: ax + by + cz + d = 0$ vara ett plan i rummet. Då är $\mathbf{n} = (a, b, c)$ en normalvektor till π .
- (2) Låt $\ell: ax + by + c = 0$ vara en linje i planet. Då är $\mathbf{n} = (a, b)$ en normalvektor till ℓ .

Bevis. (1): Låt $P_0: (x_0, y_0, z_0)$ vara en godtycklig punkt i planet π . Då gäller alltså $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.



Om $P: (x, y, z)$ är en godtycklig punkt i rummet gäller då

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} \perp \overrightarrow{P_0P} &\iff \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \\
 &\iff (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\
 &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\
 &\iff ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0 \\
 &\iff (ax + by + cz + d) - \underbrace{(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)}_{=0} = 0 \\
 &\iff ax + by + cz + d = 0 \\
 &\iff P \text{ ligger i planet } \pi
 \end{aligned}$$

Detta bevisar att $\mathbf{n} = (a, b, c)$ är ortogonal mot $\overrightarrow{P_0P}$ precis när P ligger i planet π . Alltså är \mathbf{n} en normalvektor till π .

(2): Påståendet bevisas på samma sätt som (1). ■

Sats 3.4: Låt $\pi: ax + by + cz + d = 0$ vara ett plan i rummet. För ett godtyckligt plan π' i rummet gäller då

$$\begin{aligned}
 \pi' \text{ är parallell med } \pi &\iff \\
 &\pi' \text{ har ekvationen } \pi': ax + by + cz + d' = 0 \text{ för något } d'.
 \end{aligned}$$

Bevis: Låt $\mathbf{n} = (a, b, c)$ som är normalvektor till π . Då gäller

$$\begin{aligned}
 \pi' \parallel \pi &\iff \mathbf{n} \perp \pi' \\
 &\iff \mathbf{n} \text{ är normalvektor till } \pi' \\
 &\iff \pi' \text{ har ekvationen } \pi': ax + by + cz + d' = 0 \text{ för något } d'.
 \end{aligned}$$

■

Läs själv Exempel 4.11, sida 75–76.

Vinkeln mellan två linjer

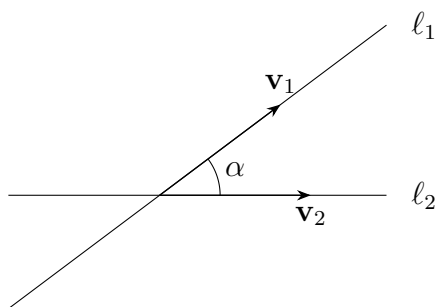
Låt ℓ_1 och ℓ_2 vara två linjer (i planet eller i rummet) som skär varandra och låt \mathbf{v}_1 respektive \mathbf{v}_2 vara riktningsvektorerna för de två linjer. *Minsta* vinkeln α mellan ℓ_1 och ℓ_2 ges då av

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}\right)$$

Observera att $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Vi delar beviset i två fall.

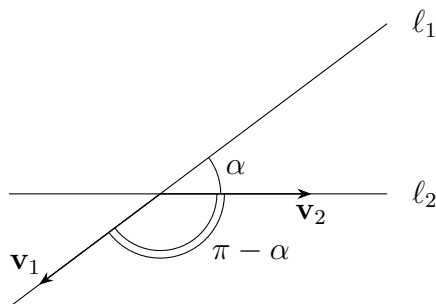
FALL 1. $0 \leq [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \leq \frac{\pi}{2}$: Vi har $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \geq 0$ och $\alpha = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ vilket ger

$$\cos(\alpha) = \cos([\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]) = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}$$



FALL 2. $\frac{\pi}{2} \leq [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \leq \pi$: Vi har $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \leq 0$ och $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \pi - \alpha$ vilket ger $\alpha = \pi - [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ varav

$$\cos(\alpha) = \cos(\pi - [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]) = -\cos([\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]) = -\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}$$



I båda fall gäller alltså $\cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}$. Då $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ gäller därför $\alpha = \arccos\left(\frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}\right)$.

Vinkeln mellan två plan

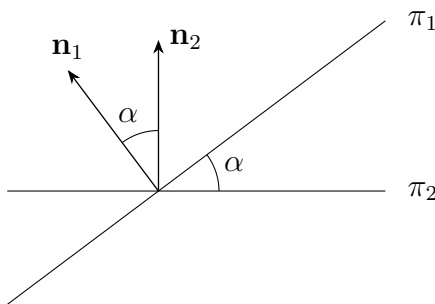
Låt π_1 och π_2 vara två icke-parallella plan med normalvektorerna \mathbf{n}_1 respektive \mathbf{n}_2 . Minsta vinkeln α mellan π_1 och π_2 ges då av

$$\alpha = \arccos \left(\frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right)$$

Observera att $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Vi ritar de två plan så att båda är vinkelräta mot papperets plan. Vi delar beviset i två fall.

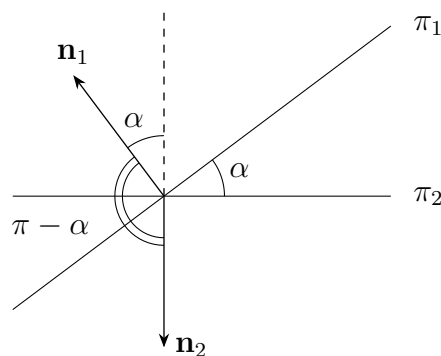
FALL 1. $0 \leq [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \leq \frac{\pi}{2}$: Vi har $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \geq 0$ och $\alpha = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ varav

$$\cos(\alpha) = \cos([\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}$$



FALL 2. $\frac{\pi}{2} \leq [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \leq \pi$: Vi har $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \leq 0$ och $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \pi - \alpha$ vilket ger $\alpha = \pi - [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$. Nu gäller

$$\cos(\alpha) = \cos(\pi - [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]) = -\cos([\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]) = -\frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}$$



I båda fall gäller alltså $\cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}$. Då $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ gäller därför $\alpha = \arccos \left(\frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right)$.

Läs själv Exempel 4.10, sida 75.

Vinkeln mellan plan och linje

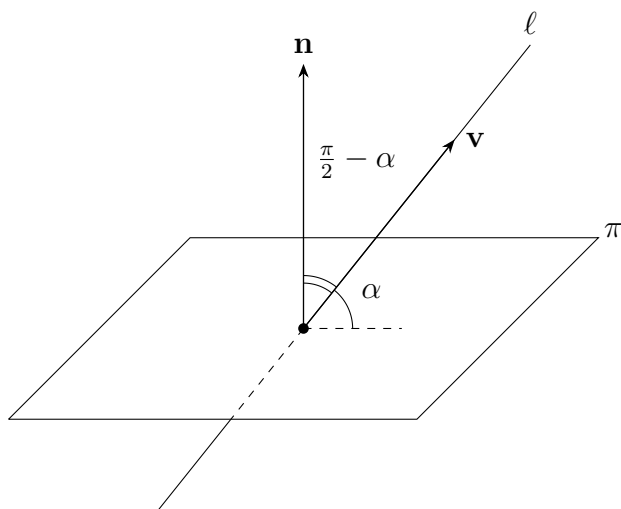
Låt π vara ett plan med normalvektorn \mathbf{n} och ℓ en linje med riktningsvektorn \mathbf{v} så att $\pi \not\parallel \ell$. Minsta vinkeln α mellan π och ℓ ges då av

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|} \right)$$

Observera att $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Vi delar i två fall.

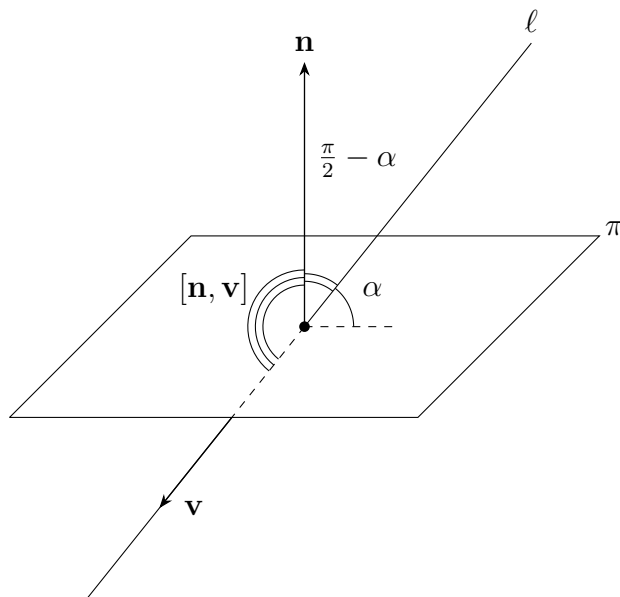
FALL 1. $0 \leq [\mathbf{n}, \mathbf{v}] \leq \frac{\pi}{2}$: Vi har $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ och $[\mathbf{n}, \mathbf{v}] = \frac{\pi}{2} - \alpha$ vilket ger $\alpha = \frac{\pi}{2} - [\mathbf{n}, \mathbf{v}]$. Nu gäller

$$\sin(\alpha) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - [\mathbf{n}, \mathbf{v}] \right) = \cos([\mathbf{n}, \mathbf{v}]) = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|}$$



FALL 2. $\frac{\pi}{2} \leq [\mathbf{n}, \mathbf{v}] \leq \pi$: Vi har $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \leq 0$ och $[\mathbf{n}, \mathbf{v}] = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\pi}{2} + \alpha$ vilket ger $\alpha = [\mathbf{n}, \mathbf{v}] - \frac{\pi}{2}$. Nu gäller

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin \left([\mathbf{n}, \mathbf{v}] - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(- \left(\frac{\pi}{2} - [\mathbf{n}, \mathbf{v}] \right) \right) = - \sin \left(\frac{\pi}{2} - [\mathbf{n}, \mathbf{v}] \right) \\ &= - \cos([\mathbf{n}, \mathbf{v}]) = - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|} \end{aligned}$$

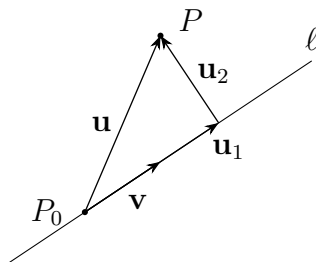


I båda fall gäller alltså $\sin(\alpha) = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{v}|}$. Då $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ gäller därför $\alpha = \arcsin\left(\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{v}|}\right)$.

Minsta avståndet mellan punkt och linje

Exempel 6. Bestäm minsta avståndet mellan punkten $P: (3, 1, -3)$ och linjen $\ell: (x, y, z) = (2 + t, -1 + t, -3 + 4t)$.

Lösning: Punkten $P_0: (2, -1, -3)$ ligger på ℓ som har $\mathbf{v} = (1, 1, 4)$ som riktningsvektor.



Från figuren erhålls att \mathbf{u}_1 är ortogonala projektionen av \mathbf{u} på \mathbf{v} . Beräkning ger nu

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0 P} = (3 - 2, 1 - (-1), -3 - (-3)) = (1, 2, 0),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} \\
&= \left(\frac{(1, 2, 0) \cdot (1, 1, 4)}{|(1, 1, 4)|^2} \right) (1, 1, 4) \\
&= \left(\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4}{1^2 + 1^2 + 4^2} \right) (1, 1, 4) \\
&= \frac{3}{18} (1, 1, 4) \\
&= \frac{1}{6} (1, 1, 4),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = (1, 2, 0) - \frac{1}{6}(1, 1, 4) = \frac{1}{6}(6 - 1, 12 - 1, 0 - 4) = \frac{1}{6}(5, 11, -4).$$

Minsta avståndet mellan P och ℓ är alltså

$$|\mathbf{u}_2| = \frac{1}{6}|(5, 11, -4)| = \frac{1}{6}\sqrt{5^2 + 11^2 + (-4)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{162} = \frac{9}{6}\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

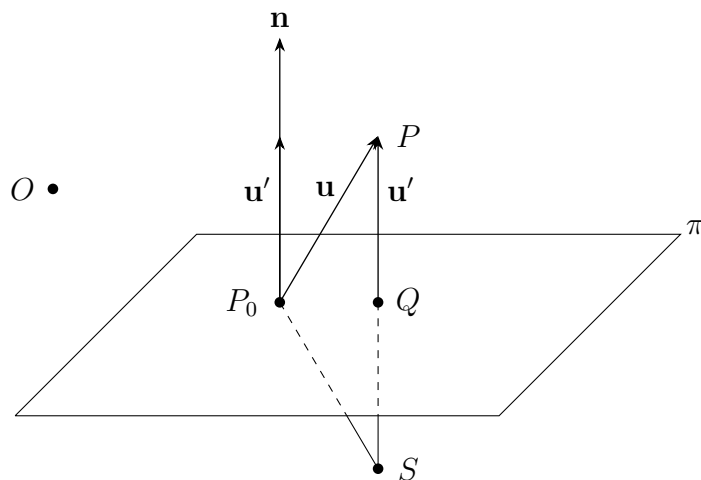
Läs själv Exempel 4.13, sida 78–79.

Projektion och spegling i plan, minsta avstånd mellan punkt och plan

Exempel 7. Bestäm ortogonala projektionen och spegelbilden av punkten $P: (1, 2, 3)$ i planet $\pi: x - y + 2z + 1 = 0$.

Lösning: Vektorn $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$ är normalvektor till π . Välj en godtycklig punkt P_0 i planet, t.ex. $P_0: (0, 1, 0)$ (observera att detta stämmer i π : ekvation!). Vi har

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P} = (1 - 0, 2 - 1, 3 - 0) = (1, 1, 3).$$



Från figuren ses att \mathbf{u}' är ortogonala projektionen av \mathbf{u} på \mathbf{n} . Projektionsformeln ger alltså

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \right) \mathbf{n} = \left(\frac{(1, 1, 3) \cdot (1, -1, 2)}{|(1, -1, 2)|^2} \right) (1, -1, 2) \\ &= \left(\frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2}{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \right) (1, -1, 2) \\ &= \frac{6}{6} (1, -1, 2) \\ &= (1, -1, 2).\end{aligned}$$

Figuren ger $\overrightarrow{PQ} = -\mathbf{u}'$ och $\overrightarrow{PS} = -2\mathbf{u}'$. Därför gäller

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3) - (1, -1, 2) = (0, 3, 1), \\ \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = (1, 2, 3) - 2(1, -1, 2) = (-1, 4, -1).\end{aligned}$$

Ortogonal projektionen av P i π är alltså $Q: (0, 3, 1)$ och spegelbilden av P i π är $S: (-1, 4, -1)$.

Läs själv Exempel 4.12, sida 76 och Anmärkning, sida 77.

Exempel 8. Bestäm minsta avståndet mellan punkten $P: (1, 2, 3)$ och planet $\pi: x - y + 2z + 1 = 0$.

Lösning: Enligt figuren och beräkningarna i Exempel 7 ovan ges minsta avståndet av

$$|\mathbf{u}'| = |(1, -1, 2)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

En alternativ metod är följande.

Avståndsformeln (=Sats 4.6): Det minsta avståndet mellan en punkt $P_0: (x_0, y_0, z_0)$ och ett plan $\pi: ax + by + cz + d = 0$ ges av

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Bevis: Läs själv sida 77. ■

Exempel 9. (=Exempel 8) Bestäm avståndet mellan punkten $P: (1, 2, 3)$ och planet $\pi: x - y + 2z + 1 = 0$.

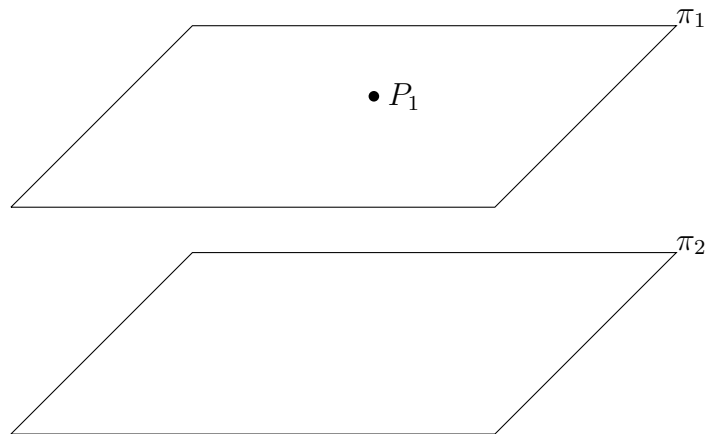
Lösning: Avståndsformeln ger

$$\frac{|1 - 2 + 2 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Minsta avståndet mellan två parallella plan

Exempel 10. Bestäm avståndet mellan planen $\pi_1: 2x - y + 5z + 3 = 0$ och $\pi_2: 2x - y + 5z + 12 = 0$ (observera att π_1 och π_2 är parallella enligt Sats 3.4).

Lösning: Avståndet mellan π_1 och π_2 är samma som avståndet mellan P_1 och π_2 , där P_1 är en godtycklig punkt i π_1 .



Välj t.ex. $P_1: (0, 3, 0)$ som stämmer i π_1 's ekvation. Avståndet mellan π_1 och π_2 blir då enligt avståndsformeln

$$\frac{|2 \cdot 0 - 3 + 5 \cdot 0 + 12|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{30}} = \frac{3}{10} \sqrt{30}.$$