Linjär Algebra 2026

Kasper K. S. Andersen

8 maj 2026

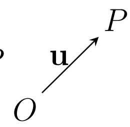
Kapitel 3: Linjer och plan

Koordinater i rummet

Låt O vara en fast punkt i rummet.

$$\text{Punkt } P \rightsquigarrow \text{Ortsvektor } \overrightarrow{OP}$$

$$\text{Vektor } \mathbf{u} \rightsquigarrow \text{Punkt } P$$



Detta ger en entydig korrespondens mellan punkter i rummet och vektorer i rummet. Låt $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ vara en bas för vektorerna i rummet. Om

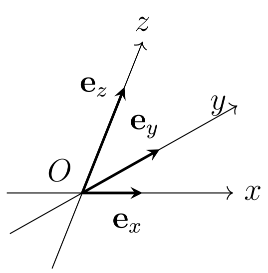
$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = (x, y, z)$$

sägs x, y, z vara *koordinaterna* för P i *koordinatsystemet* $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$. Vi skriver då $P\colon (x, y, z)$. Punkten O kallas *origo*.

Exempel 1. $\overrightarrow{OO} = \mathbf{0} = 0\mathbf{e}_x + 0\mathbf{e}_y + 0\mathbf{e}_z$, vilket ger $O\colon (0, 0, 0)$.

Definition 1. Ett *koordinatsystem* i rummet $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ består av en punkt O (origo) och en bas $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$.

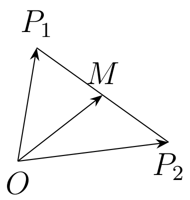
Definition 2. Linjen genom O med riktning $\mathbf{e}_x/\mathbf{e}_y/\mathbf{e}_z$ kallas *x–axeln/y–axeln/z–axeln*.



Läs Exempel 3.1, s. 45–46.

Exempel 2. Låt $P_1\colon (1,0,4)$ och $P_2\colon (5,2,0)$. Bestäm koordinaterna för mittpunkten M på sträckan $\overline{P_1P_2}$.

Lösning:

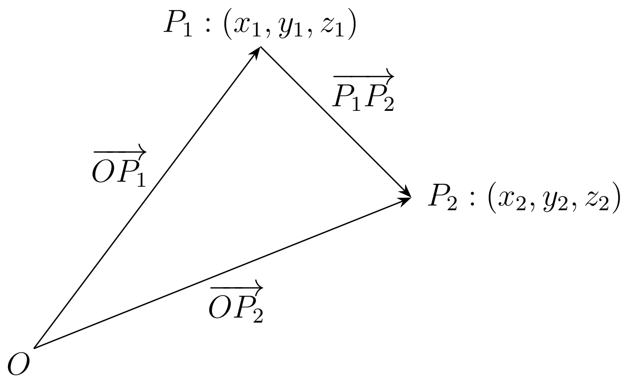


Mittpunktsformeln (Exempel 2.5) ger

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}\right) = \frac{1}{2}\left((1,0,4) + (5,2,0)\right) = \frac{1}{2}(6,2,4) = (3,1,2),$$

varav $M\colon (3,1,2)$.

Låt $P_1\colon (x_1,y_1,z_1)$ och $P_2\colon (x_2,y_2,z_2)$ vara två punkter. Då gäller



$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$, varav $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2,y_2,z_2) - (x_1,y_1,z_1)$.

$$\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)} \qquad \text{“slutpunkt} - \text{startpunkt”}$$

Läs själv Exempel 3.2, s. 46.

Koordinater i planet

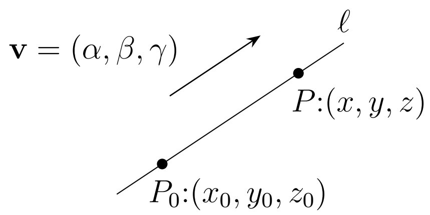
Detta fungerar på helt samma sätt som i rummet (fast med en koordinat mindre). Ett *koordinatsystem* i planet, $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y$, består av en fast punkt O och 2 vektorer $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ som bildar en bas för vektorerna i planet. En punkt P ger ortsvektorn $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y = (x, y)$. Vi skriver $P\colon (x, y)$ för koordinaterna till P.

Läs Exempel 3.3, s. 46–47.

Linjer i rummet

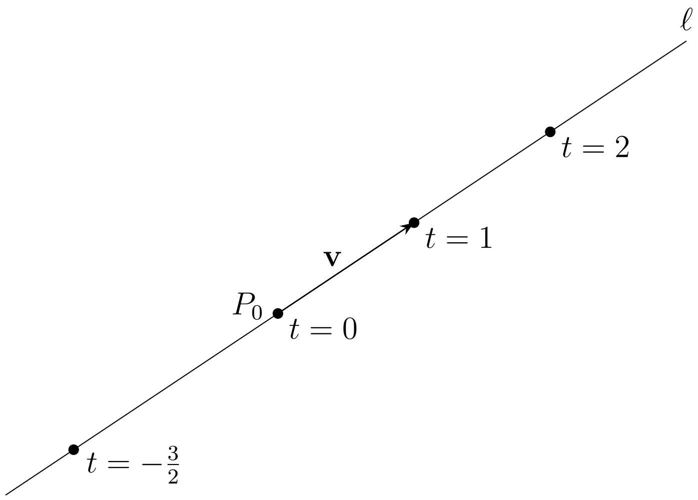
En linje ℓ i rummet är entydigt bestämd av en punkt $P_0\colon (x_0, y_0, z_0)$ på linjen och en vektor $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq \mathbf{0}$ parallell med linjen. Vektorn $\mathbf{v}$ kallas en *riktningsvektor* för ℓ. Om $P\colon (x, y, z)$ gäller

$$\begin{aligned} P \text{ ligger på } \ell &\iff \overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{v} \\ &\iff \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \text{ för något } t \\ &\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(\alpha, \beta, \gamma) \text{ för något } t. \end{aligned}$$



Detta kan skrivas

$$\ell\colon \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases} \longleftarrow \textit{Linjens ekvation på parameterform}$$



Läs Exempel 3.4, s. 48–49.

Anmärkning: Man kan få olika uttryck för samma linje! (olika P_0 och olika riktningsvektorer kan väljas).

Exempel 3. Bestäm en ekvation för linjen ℓ genom punkterna $P\colon (2, 1, 1)$ och $Q\colon (3, 2, -1)$.

Lösning: Linjen går genom punkten $(2, 1, 1)$ och har riktningsvektorn

$$\overrightarrow{PQ} = (3-2, 2-1, -1-1) = (1, 1, -2).$$

En ekvation ges då av

$$\ell\colon \begin{cases} x = 2 + \ \ t \\ y = 1 + \ \ t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Ligger $Q\colon (3, 2, -1)$ på ℓ? Ja, såklart! Alternativ:

$$(3, 2, -1) \text{ ligger på } \ell \iff \begin{cases} \ \ 3 = 2 + \ \ t \\ \ \ 2 = 1 + \ \ t \\ -1 = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{är lösbart}$$

$$\begin{cases} \ \ \ t = \ \ \ 1 \quad {}^{-1} \ \ {}^{2} \\ \ \ \ t = \ \ \ 1 \\ -2t = -2 \end{cases} \text{är lösbart} \iff \begin{cases} t = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{är lösbart}$$

(Entydig) Lösning finns, $t = 1$.

Ligger $(4,5,6)$ på ℓ?

$$(4,5,6) \text{ ligger på } \ell \iff \begin{cases} 4 = 2 + t \\ 5 = 1 + t \\ 6 = 1 - 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t &= 2 \\ t &= 4 \\ -2t &= 5 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \\ 0 = 2 \\ 0 = 9 \end{cases}$$

Lösning saknas varför $(4,5,6)$ *inte* ligger på ℓ.

Läs Exempel 3.5, s. 49.

Exempel 4 (**Skärning mellan linjer**). Skär linjerna

$$\ell_1 \colon \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \ell_2 \colon \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

varandra?

Lösning: Om linjerna skär varandra finns t och s så att

$$\begin{cases} t &= -1 - s \\ 1 - t &= 2 - s \\ 1 + 2t &= 1 \end{cases} \qquad \boxed{\text{Byt } t \text{ mot } s \text{ i ekvationen för } \ell_2!}$$

Omskrivning och Gausselimination ger

$$\begin{cases} t + s &= -1 \\ -t + s &= 1 \\ 2t &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t + s &= -1 \\ 2s &= 0 \\ -2s &= 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t + s &= -1 \\ 2s &= 0 \\ 0 &= 2 \end{cases}$$

Lösning saknas, så linjerna skär *inte* varandra.

Exempel 5 (**Skärning mellan linjer**). Skär linjerna

$$\ell_1 \colon (x,y,z) = (0,1,1) + t(1,-1,2) \qquad \text{och} \qquad \ell_2 \colon (x,y,z) = (1-t, 2-t, 1)$$

varandra?

Lösning: Vi har $\ell_1\colon\ (x,y,z) = (t, 1-t, 1+2t)$.

$$
\begin{cases}
t &= 1-s \\
1-t &= 2-s \\
1+2t &= 1
\end{cases}
\iff
\left\{
\begin{array}{rrcrl}
t & +s & = & 1 & {}^{1}\ {}^{-2} \\
-\ t & +s & = & 1 & \\
2t & & = & 0 &
\end{array}
\right.
$$

$$
\iff
\left\{
\begin{array}{rrcrl}
t & +\ s & = & 1 & \\
 & 2s & = & 2 & {}^{1} \\
 & -2s & = & -2 &
\end{array}
\right.
\iff
\left\{
\begin{array}{rrcr}
t & +\ s & = & 1 \\
 & 2s & = & 2 \\
 & 0 & = & 0
\end{array}
\right.
$$

som har entydiga lösningen $(t,s) = (0,1)$. Insättning av $t = 0$ i ℓ_1:s ekvation och/eller insättning av $s = 1$ i ℓ_2:s ekvation ger skärningspunkten $(x,y,z) = (0,1,1)$.

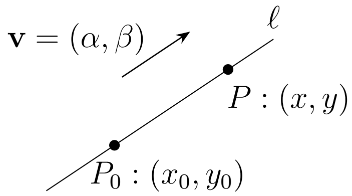
Läs Exempel 3.6, s. 49–50.

Linjer i planet

Helt analogt till ovan: Linjen ℓ i planet genom punkten $P_0\colon (x_0, y_0)$ med riktningsvektor $\mathbf{v} = (\alpha, \beta) \neq \mathbf{0}$ har ekvationen

$$
\ell\colon\ \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}
$$

på parameterform.



Vi har

$$\beta x - \alpha y = \beta(x_0 + \alpha t) - \alpha(y_0 + \beta t) = \beta x_0 - \alpha y_0.$$

Med $a = \beta$, $b = -\alpha$ och $c = \alpha y_0 - \beta x_0$ gäller alltså

$$ax + by = -c \iff \boxed{ax + by + c = 0,\ \ (a,b) \neq (0,0)}$$

Detta är *linjens ekvation på affin form*. Observera att om $b \neq 0$ kan linjen skrivas på formen $y = kx + m$:

$$ax + by + c = 0 \iff by = -ax - c \iff y = \underbrace{\left(-\frac{a}{b}\right)}_{k} \cdot x + \underbrace{\left(-\frac{c}{b}\right)}_{m}$$

Om $b = 0$ är $a \neq 0$ och

$$ax + by + c = 0 \iff ax = -c \iff x = -\frac{c}{a}$$

dvs. linjen är lodrät.

Exempel 6. (**Linjer i 2D: Parameterform till affin form**): Bestäm ekvationen på affin form för linjen ℓ genom $P_0 \colon (1, 2)$ med riktningsvektor $\mathbf{v} = (-1, 3)$.

Lösning: Parameterformen är

$$\ell \colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t. \end{cases}$$

Omskrivning och Gausselimination ger

$$\begin{cases} -t &= x \phantom{{}+y} - 1 \\ 3t &= \phantom{x+{}} y - 2 \end{cases} \overset{3}{} \iff \begin{cases} -t &= x \phantom{{}+y} - 1 \\ 0 &= 3x + y - 5 \end{cases}$$

Alltså gäller (x, y) ligger på $\ell \iff 3x + y - 5 = 0$. Linjens ekvation på affin form är därför $\ell \colon 3x + y - 5 = 0$.

Läs Exempel 3.7, s. 51.

Exempel 7. (**Linjer i 2D: Affin form till parameterform**): Bestäm ekvationen på parameterform för linjen $\ell \colon 3x + y - 5 = 0$.

Lösning: $3x + y - 5 = 0 \iff \left\{ 3x + y = 5 \right.$. Vi får

$$y = t, \qquad x = \tfrac{1}{3}(5 - y) = \tfrac{1}{3}(5 - t) = \tfrac{5}{3} - \tfrac{1}{3}t.$$

Ekvationen på parameterform är alltså

$$\ell \colon \begin{cases} x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}t \\ y = \phantom{\frac{5}{3} - \frac{1}{3}} t \end{cases}$$

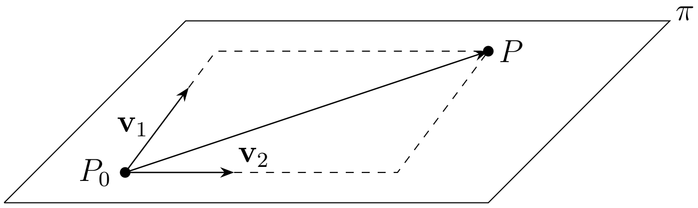
Läs Exempel 3.8, s. 52.

Anmärkning: Linjer i rummet (3D) har *inte* en ekvation på affin form, sådana finns endast för linjer i planet (2D)!

	Ekvation på parameterform	Ekvation på affin form
Linjer i planet (2D)	$\ell \colon \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$	$ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$
Linjer i rummet (3D)	$\ell \colon \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$	Finns inte!

Planets ekvation

Ett plan π i rummet är bestämt av en punkt $P_0\colon (x_0, y_0, z_0)$ på π och två icke-parallella vektorer $\mathbf{v}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\mathbf{v}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ som båda är parallella med π. Vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ kallas *riktningsvektorer* för π.



Låt $P\colon (x, y, z)$ vara en punkt i rummet. Då gäller

$$\begin{aligned}
P \text{ ligger på } \pi &\iff \overrightarrow{P_0P} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \text{ för några } t_1, t_2 \\
&\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + t_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \\
&\iff \pi\colon \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \\ y = y_0 + \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 \\ z = z_0 + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Detta kallas *planets ekvation på parameterform.*

Exempel 8. Bestäm en ekvation på parameterform för planet π genom de tre punkterna $P\colon (1, 2, 0)$, $Q\colon (0, 1, 1)$, $R\colon (2, -1, -3)$.

Lösning: Planet går genom $(1, 2, 0)$ och har riktningsvektorerna

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \overrightarrow{PQ} = (0 - 1, 1 - 2, 1 - 0) = (-1, -1, 1), \\
\mathbf{v}_2 &= \overrightarrow{PR} = (2 - 1, -1 - 2, -3 - 0) = (1, -3, -3).
\end{aligned}$$

Detta ger ekvationen på parameterform (vi sätter $t_1 = s$ och $t_2 = t$):

$$\pi\colon \begin{cases} x = 1 - s + t \\ y = 2 - s - 3t \\ z = \phantom{1 - {}} s - 3t \end{cases}$$

Ligger $P_1\colon (3, -2, -5)$ på π?

$$P_1 \text{ ligger på } \pi \iff \begin{cases} 3 = 1 - s + t \\ -2 = 2 - s - 3t \\ -5 = \phantom{2 - {}} s - 3t \end{cases} \quad \text{är lösbart} \iff$$

$$\begin{cases} -s & +\ t & = & 2 \\ -s & -3t & = & -4 \\ s & -3t & = & -5 \end{cases} \iff \begin{cases} -s & +\ t & = & 2 \\ & -4t & = & -6 \\ & -2t & = & -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -s & +\ t & = & 2 \\ & -4t & = & -6 \\ & 0 & = & 0 \end{cases}$$

(Entydig) Lösning finns, $(s,t) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Alltså ligger P_1 på π.
Ligger P_2: $(1,2,3)$ på π?

$$P_2 \text{ ligger på } \pi \iff \begin{cases} 1 = 1 - s + \ t \\ 2 = 2 - s - 3t \\ 3 = \qquad s - 3t \end{cases} \quad \text{är lösbart} \iff$$

$$\begin{cases} -s & +\ t & = & 0 \\ -s & -3t & = & 0 \\ s & -3t & = & 3 \end{cases} \iff \begin{cases} -s & +\ t & = & 0 \\ & -4t & = & 0 \\ & -2t & = & 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -s & +\ t & = & 0 \\ & -4t & = & 0 \\ & 0 & = & 3 \end{cases}$$

Lösning saknas, dvs. P_2 ligger *inte* på π.
Ligger (x,y,z) på π?

$$(x,y,z) \text{ ligger på } \pi \iff \begin{cases} x = 1 - s + \ t \\ y = 2 - s - 3t \\ z = \qquad s - 3t \end{cases} \quad \text{är lösbart} \iff$$

$$\begin{cases} -s & +\ t & = & x & & & -1 \\ -s & -3t & = & & y & & -2 \\ s & -3t & = & & & z & \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -s & +t & = & x & & -1 \\ & -4t & = & -x + y & & -1 \\ & -2t & = & x + & z & -1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -s & +\ t & = & x - \frac{1}{2}y & & - & 1 \\ & -2t & = & x & + z & - & 1 \\ & 0 & = & \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y & + z & - & \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1}$$

Alltså gäller

$$\begin{aligned}(x,y,z) \text{ ligger på } \pi &\iff \text{ekvationssystemet (1) är lösbart}\\ &\iff \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}y + z - \tfrac{1}{2} = 0\\ &\iff \boxed{\pi\colon 3x - y + 2z - 1 = 0}\end{aligned}$$

Detta är *planets ekvation på affin form*. Vi kan nu testa P_1 och P_2 direkta:

$$P_1\colon 3\cdot 3 - (-2) + 2\cdot(-5) - 1 = 0, \quad P_2\colon 3\cdot 1 - 2 + 2\cdot 3 - 1 = 6 \neq 0.$$

Alltså gäller $P_1 \in \pi$ och $P_2 \notin \pi$.

Läs Exempel 3.9–3.10, s. 53–55.

Allmänt: Varje plan π i rummet har en ekvation $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$ på affin form där a, b och c inte alla är 0.

	Ekvation på parameterform	Ekvation på affin form
Plan i rummet (3D)	$\pi\colon \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \\ y = y_0 + \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 \\ z = z_0 + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2 \end{cases}$	$ax + by + cz + d = 0$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

Parameterform till affin form: Som i Exempel 8 ovan.

Affin form till parameterform: Om planet har ekvationen

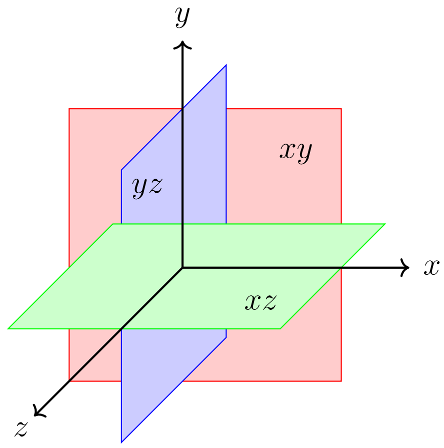
$$\pi\colon ax + by + cz + d = 0, \qquad a \neq 0$$

väljas $y = s$, $z = t$ och x lösas ut. Motsvarande i fallen $b \neq 0$ och $c \neq 0$.

Läs Exempel 3.11, s. 56.

Koordinatplanen: *xy–planet* har den affina ekvationen $z = 0$, *xz–planet* har den affina ekvationen $y = 0$ och *yz–planet* har den affina ekvationen $x = 0$. Parameterekvationer ges av

$$xy-\text{planet}\colon \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 0, \end{cases} \quad xz-\text{planet}\colon \begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = t, \end{cases} \quad yz-\text{planet}\colon \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = t. \end{cases}$$



Exempel 9 (**Skärning mellan plan och linje**). Bestäm skärningen mellan planet $\pi\colon 3x + y - z + 4 = 0$ och linjen

$$\ell\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Lösning: Sätt in ekvationen för ℓ i ekvationen för π:

$$3(1+t) + (3+2t) - (2+t) + 4 = 0 \iff 4t + 8 = 0 \iff t = -2.$$

Sätt sedan in $t = -2$ i ekvationen för ℓ:

$$\ell\colon \begin{cases} x = 1 + (-2) = -1 \\ y = 3 + 2(-2) = -1 \\ z = 2 + (-2) = 0 \end{cases}$$

Skärningspunkten är alltså $(-1, -1, 0)$.

Läs Exempel 3.12, s. 56–57.

Exempel 10 (**Skärning mellan två plan**). Bestäm skärningen mellan planen

$$\pi_1\colon x + 3y - z + 1 = 0 \qquad \text{och} \qquad \pi_2\colon 2x + 5y + 3z - 2 = 0.$$

Lösning:

$$\begin{cases} x & +3y & -\ z & +1 & = & 0 \\ 2x & +5y & +3z & -2 & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & +3y & -\ z & = & -1 \\ 2x & +5y & +3z & = & 2 \end{cases} \begin{array}{l} \urcorner^{-2} \\ \hookleftarrow \end{array}$$

$$\begin{cases} x & +3y & -\ z & = & -1 \\ & -\ y & +5z & = & 4 \end{cases}$$

Vi får parameterlösningen

$$z = t, \qquad y = -4+5t, \qquad x = -1-3y+z = -1-3(-4+5t)+t = 11-14t$$

Skärningen är alltså

$$\ell\colon \begin{cases} x = 11 - 14t \\ y = -\ 4 + \ 5t \\ z = 0 + \ 1t \end{cases}$$

dvs. linjen genom punkten $(11, -4, 0)$ med riktningsvektorn $(-14, 5, 1)$.

Läs Exempel 3.13, s. 57–58.

Sats 3.4: Planet π_2 är parallell med planet $\pi_1\colon ax + by + cz + d = 0 \iff \pi_2$ har (upp till skalering) den affina ekvationen $\pi_2\colon ax + by + cz + d' = 0$ för något d'.

Exempel 11. Låt $\pi_1\colon 2x + 3y + 5z + 10 = 0$, $\pi_2\colon 2x + 3y - 5z + 8 = 0$ och $\pi_3\colon 4x + 6y + 10z + 9 = 0$. Då gäller:

- π_1 och π_2 är *inte* parallella ($\pi_1 \nparallel \pi_2$).
- π_1 och π_3 är parallella ($\pi_1 \parallel \pi_3$).
- π_2 och π_3 är *inte* parallella ($\pi_2 \nparallel \pi_3$).

Geometrisk tolkning av linjära ekvationssystem

• En ekvation med 3 obekanta $\longleftrightarrow$ ett plan i rummet.

• Två ekvationer med 3 obekanta $\longleftrightarrow$ skärning mellan två plan i rummet.
Fall 1. Lösning saknas: Planen är parallella (och skiljer sig från varandra).
Fall 2. Oändligt många lösningar:

(a) En parameter ("med t"): Skärningen är en linje.

(b) Två parametrar ("med s, t"): Planen sammanfaller.

• Tre ekvationer med 3 obekanta $\longleftrightarrow$ skärning mellan tre plan i rummet.
Fall 1. Lösning saknas: Planen saknar gemensamma punkter.
Fall 2. Entydig lösning: Skärningen är en punkt.
Fall 3. Oändligt många lösningar:

(a) En parameter ("med t"): Skärningen är en linje.

(b) Två parametrar ("med s, t"): De tre planen sammanfaller.

Läs s. 58–61 tom. "Anmärkning".