Linjär Algebra 2026

Kasper K. S. Andersen

8 maj 2026

Kapitel 2: Geometriska vektorer

“I’m applying for a villain loan. I go by the name of Vector. It’s a mathematical term, represented by an arrow with both direction and magnitude. Vector! That’s me, because I commit crimes with both direction and magnitude. Oh yeah!”

Skalära storheter (dvs. tal): längd, area, massa, fart, ...

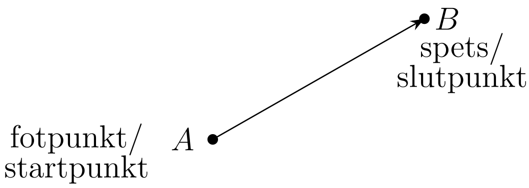
Vektoriella storheter (har både storlek och riktning): kraft, acceleration, hastighet, ...

Fart (tal): t.ex. 70 km/h

Hastighet = Fart och riktning: t.ex. 70 km/h norrut

Riktade sträckor och vektorer

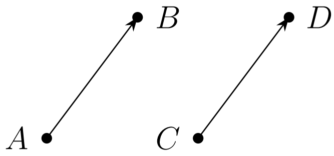
Låt A och B vara två punkter. Då är $\overrightarrow{AB}$ en *riktad sträcka*.



Varje riktad sträcka bestämmer en *vektor*. Beteckning för vektorer: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, ... (handstil: $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, ...).

Definition 1. Två riktade sträckor $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ representerar samma vektor $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ har samma längd och riktning $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{CD}$ kan fås från $\overrightarrow{AB}$ genom parallellförflytning.

Exempel 1. I figuren nedan är $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ representanter för *samma* vektor.



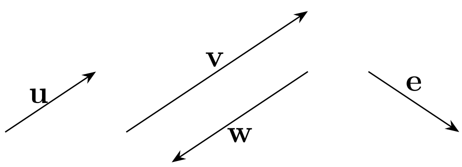
Definition 2. Längden av vektorn $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ betecknas $|\mathbf{u}|$ eller $|\overrightarrow{AB}|$.

Anmärkning: Vi har $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$, men $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ om $A \neq B$.

Definition 3. *Nollvektorn* $\mathbf{0}$ ges av $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$ (dvs. $B = A$). Vi har $|\mathbf{0}| = 0$. Observera också att $|\mathbf{u}| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

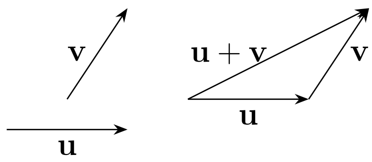
Definition 4. Två vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ kallas *parallella* om de har samma riktning eller är motsatt riktade. Dessutom sägs $\mathbf{0}$ vara parallell med alla vektorer. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella skrivs $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är parallella skrivs $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$.

Exempel 2. För vektorerna nedan gäller $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \parallel \mathbf{w}$ och $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{e}$.



2.2 Räkneoperationer

Definition 5 (Addition av vektorer). Summan av två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ definieras genom att sätta $\mathbf{v}$ i förlängning av $\mathbf{u}$:



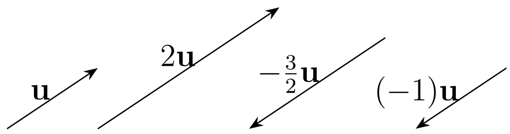
Definition 6 (Multiplikation av vektor med skalär). Låt λ vara ett reellt tal och $\mathbf{u}$ en vektor. Då är $\lambda\mathbf{u}$ den vektorn som uppfyller:

- Längden av $\lambda\mathbf{u}$ ges av $|\lambda\mathbf{u}| = |\lambda||\mathbf{u}|$.
- Riktningen av $\lambda\mathbf{u}$ ges av: Om $\lambda \neq 0$ och $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ gäller

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{u} \text{ har samma riktning som } \mathbf{u} \text{ om } \lambda > 0, \\ \lambda\mathbf{u} \text{ har motsatt riktning av } \mathbf{u} \text{ om } \lambda < 0. \end{cases}$$

Anmärkning: Vektorn $\lambda\mathbf{u}$ är entydigt bestämd. Vi har $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{u}$ och $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ för alla λ.

Exempel 3.



Anmärkning (Används i Sats 2.2 och uppgift 2.18): Om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ gäller

$$\mathbf{v} \parallel \mathbf{u} \iff \mathbf{v} = \lambda\mathbf{u} \text{ för något } \lambda.$$

Bevis: $\Longrightarrow$ Anta först $\mathbf{v} \parallel \mathbf{u}$. Om $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ kan $\lambda = 0$ användas. Om $\mathbf{v}$ har samma riktning som $\mathbf{u}$ fungerar $\lambda = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}$: Vi har $\lambda > 0$ så $\lambda\mathbf{u}$ har samma riktning som $\mathbf{u}$ och därmed samma riktning som $\mathbf{v}$. Dessutom gäller

$$|\lambda\mathbf{u}| = |\lambda||\mathbf{u}| = \left|\frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}\right||\mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|.$$

$\lambda\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har alltså samma riktning och samma längd, dvs. $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$.

I fallet där $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}$ har motsatta riktningar duger $\lambda = -\frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}$: Då $\lambda < 0$ har $\lambda\mathbf{u}$ motsatt riktning av $\mathbf{u}$ och därmed samma riktning som $\mathbf{v}$. Dessutom gäller

$$|\lambda\mathbf{u}| = |\lambda||\mathbf{u}| = \left|-\frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}\right||\mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|.$$

$\lambda\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har alltså också i detta fall samma riktning och samma längd, dvs. vi har igen $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$.

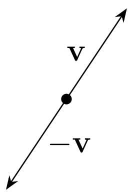
$\Longleftarrow$ Anta nu att $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ för något λ. Om $\lambda = 0$ är $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{0} \parallel \mathbf{u}$. Om $\lambda > 0$ eller $\lambda < 0$ är $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}$ har samma eller motsatta riktningar varför $\mathbf{v} \parallel \mathbf{u}$. $\blacksquare$

Sats 2.1: För vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ och reella tal λ, μ gäller räknelagarna

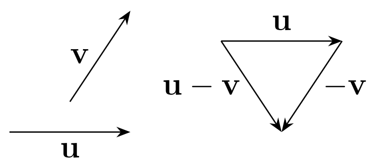
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$,
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$,
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$,
- $\mathbf{u} + ((-1)\mathbf{u}) = \mathbf{0}$,
- $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$,
- $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$ och
- $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$.

Bevis: Läs själv, s. 23–24. Beviset använder lämpliga figurer. $\blacksquare$

Definition 7. (Subtraktion av vektorer) För vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ definieras $-\mathbf{v} = (-1)\,\mathbf{v}$:



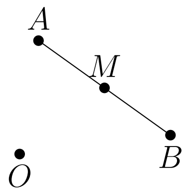
och *differensen* $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$:



Exempel 4. (Exempel 2.5 = Uppgift 2.5) Låt M vara mittpunkten på sträckan AB och O en godtycklig punkt. Då gäller mittpunktsformeln

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

Lösning: Figuren ger $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Dessutom gäller



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} \iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} \iff \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} &\iff \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\\ &\iff 2\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\\ &\iff \overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).\end{aligned}$$

■

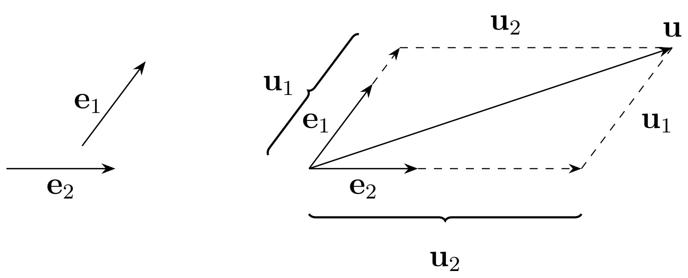
2.3 Bas och koordinater

Sats 2.2: Låt $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ vara två icke-parallella vektorer i planet. Då kan varje vektor $\mathbf{u}$ i planet skrivas på formen

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$$

med entydigt bestämda tal x_1, x_2.

Bevis: (Existens)



Då $\mathbf{e}_1 \not\parallel \mathbf{e}_2$ gäller $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}$ (ty $\mathbf{0} \parallel \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{0}$). Från figuren ses att det finns vektorer $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ så att $\mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_2 \parallel \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Då $\mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$ ger anmärkningen ovan att $\mathbf{u}_1 = x_1\mathbf{e}_1$ för något x_1. På samma sätt finns det x_2 så att $\mathbf{u}_2 = x_2\mathbf{e}_2$. Alltså är $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Detta visar existensen.

(Entydighet) Anta att

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2.$$

Vi måste visa att $x_1' = x_1$ och $x_2' = x_2$. Omskrivning ger

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2 &\iff x_1\mathbf{e}_1 - x_1'\mathbf{e}_1 = x_2'\mathbf{e}_2 - x_2\mathbf{e}_2 \\ &\iff (x_1 - x_1')\mathbf{e}_1 = (x_2' - x_2)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Om $x_1 \neq x_1'$ gäller $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{x_2'-x_2}{x_1-x_1'}\right)\mathbf{e}_2$ och anmärkningen ovan ger då $\mathbf{e}_1 \parallel \mathbf{e}_2$ vilket är en motsägelse. Alltså gäller *inte* $x_1 \neq x_1'$, dvs. vi har $x_1 = x_1'$.
Om $x_2 \neq x_2'$ gäller $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{x_1-x_1'}{x_2'-x_2}\right)\mathbf{e}_1$ och anmärkningen ovan ger då $\mathbf{e}_2 \parallel \mathbf{e}_1$. Detta är en motsägelse och vi konkluderar att $x_2 = x_2'$. ■

I rummet (3D) gäller:

Sats 2.3: Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ vara tre vektorer i rummet som inte ligger i samma plan. Då kan varje vektor $\mathbf{u}$ i rummet skrivas på formen

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

med entydigt bestämda tal x_1, x_2, x_3.

Bevis: Läs själv (s. 30–31). ■

Definition 8. Om $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ är icke-parallella vektorer i planet sägs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ vara en *bas för vektorerna i planet.*
Om $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ är tre vektorer i rummet som inte ligger i samma plan, sägs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vara en *bas för vektorerna i rummet.*

I det första fallet skrivs $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ i stället för $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. De entydigt bestämda tal x_1, x_2 från Sats 2.2 kallas *koordinaterna* för $\mathbf{u}$ med avseende på basen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. På samma sätt skrivs $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ i rummet.

Exempel 5. $\mathbf{0} = (0,0)$ ty $\mathbf{0} = 0\,\mathbf{e}_1 + 0\,\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ ty $\mathbf{e}_1 = 1\,\mathbf{e}_1 + 0\,\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ ty $\mathbf{e}_2 = 0\,\mathbf{e}_1 + 1\,\mathbf{e}_2$.

Räknelagar: I planet gäller $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ och $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$. Motsvarande gäller för vektorer i rummet.

Exempel 6. Om $\mathbf{u} = (1,2)$ och $\mathbf{v} = (4,2)$ gäller

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1,2) + (4,2) = (5,4), \quad \text{och} \quad 2\mathbf{u} = 2(1,2) = (2,4).$$

2.4 Linjärt beroende och oberoende vektorer

Definition 9. Låt $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ vara vektorer. Ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_m \mathbf{u}_m = \mathbf{0} \tag{1}$$

har lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. Vi har då precis ett av följande två fall:

(a) Detta är den enda lösningen till (1). Vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ kallas då *linjärt oberoende*.

(b) Det finns en lösning $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ till (1) så att minst ett $\lambda_i \neq 0$. Vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ kallas då *linjärt beroende*.

Anmärkning. (En vektor) Om $m = 1$ blir ekvationen $\lambda_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Om $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ är λ_1 godtycklig, dvs. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ är linjärt beroende. Om $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ erhålls $\lambda_1 = 0$, dvs. $\mathbf{u}_1$ är linjärt oberoende. Alltså gäller

$$\mathbf{u}_1 \text{ är linjärt oberoende } \iff \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}.$$

Exempel 7. Är vektorerna $\mathbf{u}_1 = (-5, 2)$ och $\mathbf{u}_2 = (3, -1)$ linjärt beroende eller linjärt oberoende?

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} &\iff \lambda_1(-5, 2) + \lambda_2(3, -1) = \mathbf{0} \\
&\iff (-5\lambda_1, 2\lambda_1) + (3\lambda_2, -\lambda_2) = (0, 0) \\
&\iff (-5\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_2) = (0, 0) \\
&\iff \begin{cases} -5\lambda_1 & +3\lambda_2 & = & 0 \quad \tfrac{2}{5} \\ 2\lambda_1 & -\ \lambda_2 & = & 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -5\lambda_1 & +3\lambda_2 & = & 0 \\ & \tfrac{1}{5}\lambda_2 & = & 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

varför $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ är den enda lösningen till (1). Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (-5, 2)$ och $\mathbf{u}_2 = (3, -1)$ är alltså *linjärt oberoende*.

Exempel 8. Är vektorerna $\mathbf{u}_1 = (-6, 2)$ och $\mathbf{u}_2 = (3, -1)$ linjärt beroende eller linjärt oberoende?

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned}
\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} &\iff \lambda_1(-6,2) + \lambda_2(3,-1) = \mathbf{0} \\
&\iff (-6\lambda_1, 2\lambda_1) + (3\lambda_2, -\lambda_2) = (0,0) \\
&\iff (-6\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_2) = (0,0) \\
&\iff \begin{cases} -6\lambda_1 & +3\lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & -\ \lambda_2 & = & 0 \end{cases} \quad \tfrac{1}{3} \\
&\iff \begin{cases} -6\lambda_1 & +3\lambda_2 & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vi får parameterlösningen $(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{1}{2}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, så $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ är *inte* den enda lösningen till (1). Vektorerna $\mathbf{u}_1 = (-6,2)$ och $\mathbf{u}_2 = (3,-1)$ är alltså *linjärt beroende.*

Anmärkning. Observera att i båda Exempel 7 och Exempel 8 fås ett *homogent* linjärt ekvationssystem, där antalet obekanta är samma som antalet vektorer. Detta gäller även allmänt. Speciellt finns det oändligt många lösningar i fall (b) i Definition 9.

Definition 10. En *linjärkombination* av vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ är en vektor $\mathbf{v}$ av formen

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ är reella tal.

Anmärkning.

(1) Om $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ gäller

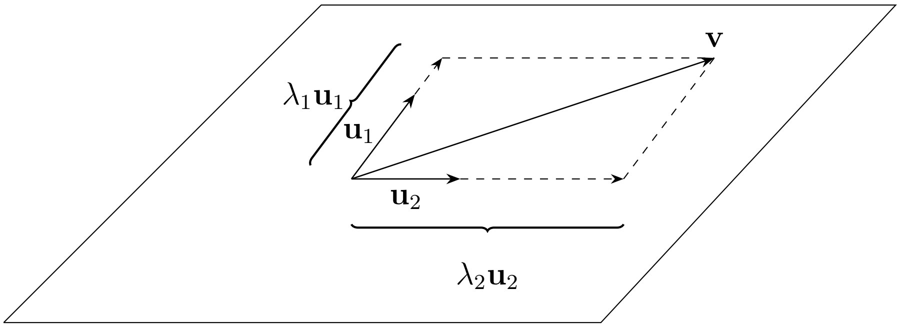
$$\mathbf{v} \text{ är en linjärkombination av } \mathbf{u}_1 \iff \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u}_1 \text{ för något } \lambda_1 \iff \mathbf{v} \parallel \mathbf{u}_1.$$

Om $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ gäller

$$\mathbf{v} \text{ är en linjärkombination av } \mathbf{0} \iff \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{0} \text{ för något } \lambda_1 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

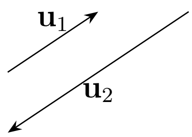
(2) Om $\mathbf{u}_1 \nparallel \mathbf{u}_2$ gäller

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v} \text{ är en linjärkombination av } \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \iff \\
&\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 \text{ för några } \lambda_1, \lambda_2 \iff \\
&\mathbf{v} \text{ ligger i planet som spänns upp av } \mathbf{u}_1 \text{ och } \mathbf{u}_2.
\end{aligned}$$

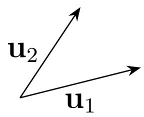


Sats 2.5 (Linjärt beroende/oberoende, alternativ) Vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ är linjärt beroende $\Longleftrightarrow$ En av vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ är en linjärkombination av de övriga.

Exempel 9. (Två vektorer)



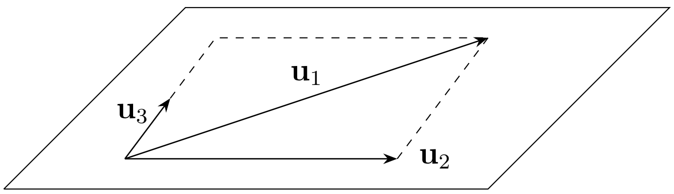
Vektorerna ovan är *linjärt beroende*: $\mathbf{u}_2 = -2\mathbf{u}_1 \Longleftrightarrow 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$.



Vektorerna ovan är *linjärt oberoende*: Vi har $\mathbf{u}_1 \neq \lambda\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_2 \neq \lambda\mathbf{u}_1$. Alternativ: Enda lösningen till $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ är $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Anmärkning: $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ linjärt beroende $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{u}_2$ (parallella).

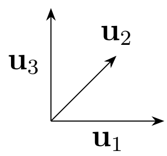
Exempel 10. (Tre vektorer)



Vektorerna ovan är *linjärt beroende*:

$$\mathbf{u}_1 = 1\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 \iff 1\mathbf{u}_1 + (-1)\mathbf{u}_2 + (-2)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}.$$

Figuren nedan är i 3D, dvs de tre vektorerna är vektorer i rummet:



Vektorerna ovan är *linjärt oberoende*: Vi har $\mathbf{u}_1 \neq \lambda\mathbf{u}_2 + \mu\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_2 \neq \lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_3 \neq \lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{u}_2$. Alternativ: Enda lösningen till $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ är $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Sats 2.4 (Bassatsen):

(1) Två vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ är en bas i planet $\iff$ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ är linjärt oberoende.

(2) Tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är en bas i rummet $\iff$ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är linjärt oberoende.

(2') Tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ i rummet ligger i samma plan $\iff$ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är linjärt beroende.

(3)
- Fler än 2 vektorer i planet är alltid linjärt beroende.
- Fler än 3 vektorer i rummet är alltid linjärt beroende.

Bevis: (1) följer av Anmärkningen förra Exempel 10.

Påståenden (2') och (2) är ekvivalenta enligt definitionen av en bas. Läs själv bevisen för (2) sida 35 i läroboken.

(3) följer av satsen om underbestämda homogena linjära ekvationssystem. ■

Exempel 11. Vektorerna $(-5, 2), (3, -1)$ är en bas i planet.

Exempel 12. Vektorerna $(-6, 2), (3, -1)$ är *inte* en bas i planet.

Läs själv Exempel 2.7–2.10, sida 34–37. §2.5 ingår ej.