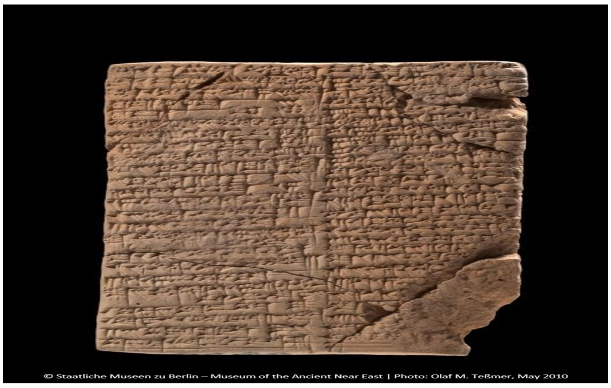
Linjär Algebra 2026

Kasper K. S. Andersen

8 maj 2026

Kapitel 1: Linjära ekvationssystem



Lertavlan VAT 8389 (ca. 1800 f.Kr.)

Definition 1. En *linjär ekvation* är en ekvation av typ

$$\text{tal} \cdot \text{obekant} + \text{tal} \cdot \text{obekant} + \ldots + \text{tal} \cdot \text{obekant} = \text{tal}.$$

Exempel 1. Ekvationen $2x + 3y = 5$ är linjär. Ekvationen $x_1x_2 + 3x_3 = 5$ är *inte* linjär.

Definition 2. Ett *linjärt ekvationssystem* är ett system av linjära ekvationer.

Exempel 2. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \end{cases}$$

från lertavlan VAT 8389 är ett linjärt ekvationssystem. Hur löser man detta? Svar: Med hjälp av systematisk elimination (Gausselimination).

Exempel 3 (=Exempel 2 igen).

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \quad (\cdot 6) \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 1800 \quad \xrightarrow{-4} \\ 4x - 3y = 3000 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 1800 \\ -7y = -4200 \end{cases}$$

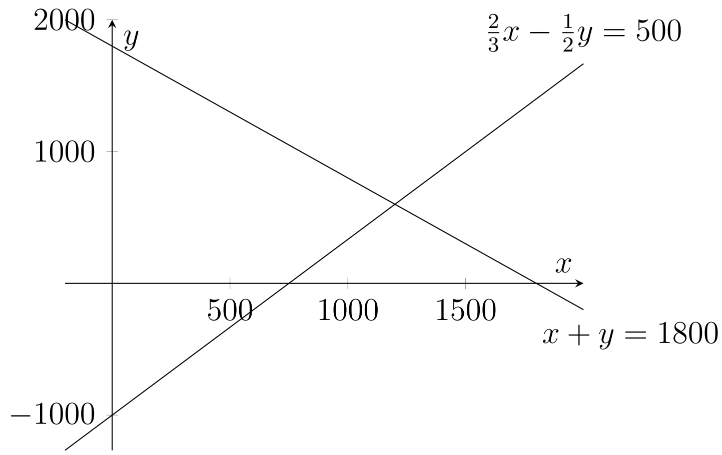
Systemet är nu på *trappform.* Vi använder sedan *återsubstitution:*

$$y = \frac{-4200}{-7} = 600, \qquad x = 1800 - y = 1800 - 600 = 1200.$$

Vi får *entydiga lösningen* $(x, y) = (1200, 600)$. Delvis kontroll fås genom insättning i det ursprungliga ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 1200 + 600 = 1800 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = \frac{2}{3} \cdot 1200 - \frac{1}{2} \cdot 600 = 500 \end{cases}$$

Geometriskt representerar ekvationssystemet skärningen mellan två linjer i planet ($x + y = 1800 \iff y = -x + 1800$ och $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \iff y = \frac{4}{3}x - 1000$).



Ekvationssystemet i exemplet kallas *kvadratiskt* då det finns lika många villkor (ekvationer) och obekanta. Som *tumregel* har sådana ekvationssystem entydig lösning som i detta exempel.

Elimination i större ekvationssystem hanteras på samma sätt.

Exempel 4.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 3x & -8y & +\;z & = & 22 \\ 2x & -3y & +4z & = & 20 \\ x & -2y & +\;z & = & 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcrl} x & -2y & +\;z & = & 8 & \scriptstyle -2 \;\; -3 \\ 2x & -3y & +4z & = & 20 & \\ 3x & -8y & +\;z & = & 22 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrl} x & -2y & +\;z & = & 8 & \\ & y & +2z & = & 4 & \scriptstyle 2 \\ & -2y & -2z & = & -2 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -2y & +\;z & = & 8 \\ & y & +2z & = & 4 \\ & & 2z & = & 6 \end{array}\right.$$

Systemet är nu på trappform. Återsubstitution ger

$z = \frac{6}{2} = 3, \quad y = 4-2z = 4-2\cdot 3 = -2, \quad x = 8+2y-z = 8+2\cdot(-2)-3 = 1.$

Vi får entydiga lösningen $(x, y, z) = (1, -2, 3)$. Delvis kontroll:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x - 8y + \;z & = & 3\cdot 1 & - & 8\cdot(-2) & + & 3 & = & 22 \\ 2x - 3y + 4z & = & 2\cdot 1 & - & 3\cdot(-2) & + & 4\cdot 3 & = & 20 \\ x - 2y + \;z & = & 1 & - & 2\cdot(-2) & + & 3 & = & 8 \end{array}\right.$$

Tillåtna radoperationer:

- Byte av två ekvationer.
- En ekvation multipliceras med ett tal $\neq 0$.
- En ekvation multipliceras med ett tal och adderas till en annan ekvation.

Sats: De tillåtna radoperationerna ändrar inte på lösningen till ett linjärt ekvationssystem.

Metod till lösning av ett linjärt ekvationssystem:

1. Systematisk elimination m.h.a. tillåtna radoperationer.
2. Återsubstitution.
3. (Delvis kontroll.)

Steg 1 och 2 kallas tillsammans Gausselimination.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Exempel 5.

$$
\left\{\begin{array}{rrrrrl}
x & -\ 4y & +\ 6z & = & 3 & {}^{-4}\ {}^{3} \\
4x & -14y & +30z & = & 5 & \\
-3x & +13y & -15z & = & -13 &
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrrl}
x & -4y & +6z & = & 3 & \\
 & 2y & +6z & = & -7 & {}^{-\frac{1}{2}} \\
 & y & +3z & = & -4 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrr}
x & -4y & +6z & = & 3 \\
 & 2y & +6z & = & -7 \\
 & & 0 & = & -\frac{1}{2}
\end{array}\right.
$$

Lösning saknas! Kontroll är inte möjlig.

Exempel 6.

$$
\left\{\begin{array}{rrrrrl}
-3x & +9y & -6z & = & -\ 3 & (\cdot -\tfrac{1}{3}) \\
2x & -5y & +2z & = & -\ 6 & \\
-3x & +7y & -2z & = & 13 &
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrrl}
x & -3y & +2z & = & 1 & {}^{-2}\ {}^{3} \\
2x & -5y & +2z & = & -\ 6 & \\
-3x & +7y & -2z & = & 13 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrrl}
x & -3y & +2z & = & 1 & \\
 & y & -2z & = & -\ 8 & {}^{2} \\
 & -2y & +4z & = & 16 &
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rrrrr}
x & -3y & +2z & = & 1 \\
 & y & -2z & = & -8 \\
 & & 0 & = & 0
\end{array}\right.
$$

Med $z = t$ erhålls

$y = -8 + 2z = -8 + 2t, \qquad x = 1 + 3y - 2z = 1 + 3(-8 + 2t) - 2t = -23 + 4t.$

Oändligt många lösningar (parameterlösning):

$$(x, y, z) = (-23 + 4t, -8 + 2t, t), \quad t \in \mathbb{R} \text{ godtycklig parameter.}$$

Delvis kontroll:

$$\begin{cases} -3x+9y-6z &= -3(-23+4t) & +9(-8+2t) & -6t &= -\ 3 \\ \ \ 2x-5y+2z &= \ \ 2(-23+4t) & -5(-8+2t) & +2t &= -\ 6 \\ -3x+7y-2z &= -3(-23+4t) & +7(-8+2t) & -2t &= \ \ 13 \end{cases}$$

Lösningstyper för linjära ekvationssystem

Sats: $(0/1/\infty)$ Ett linjärt ekvationssystem har antingen

(0) Ingen lösning (Exempel 5), eller

(1) Entydig lösning (Exempel 3 och 4), eller

(∞) Oändligt många lösningar = parameterlösning (Exempel 6).

Homogena linjära ekvationssystem

Definition: Ett *homogent* linjärt ekvationssystem är ett linjärt ekvationssystem där samtliga högerled är 0.

Exempel 7. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 15x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

är homogent. Observera att $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ är en lösning. Finns det fler?

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 15x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 10x_2 - 5x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 & -2 & -4 \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ \qquad 4x_2 - 6x_3 + 20x_4 = 0 \\ \quad -2x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0 \\ \quad -2x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +\ 5x_4 & = & 0 \\ & 4x_2 & -6x_3 & +20x_4 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

Med $x_3 = s$ och $x_4 = t$ gäller

$$\begin{aligned} x_2 &= \tfrac{1}{4}(6x_3 - 20x_4) = \tfrac{3}{2}s - 5t \\ x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -3\left(\tfrac{3}{2}s - 5t\right) + 2s - 5t = -\tfrac{5}{2}s + 10t \end{aligned}$$

dvs. vi får parameterlösningen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\tfrac{5}{2}s + 10t, \tfrac{3}{2}s - 5t, s, t\right), s, t \in \mathbb{R} \text{ godtyckliga parametrar.}$$

Sats: (Homogena system, $1/\infty$) Ett homogent linjärt ekvationssystem har antingen

(1) Entydiga lösningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, eller

(∞) Oändligt många lösningar = parameterlösning (Exempel 7).

Sagt annorlunda: Ett homogent linjärt ekvationssystem har alltid den *triviella lösningen* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Om detta är den enda lösningen är vi i fall (1), annars är vi i fall (∞).

Underbestämda linjära ekvationssystem

Definition: Ett *underbestämt* linjärt ekvationssystem är ett linjärt ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer.

Sats: (Underbestämda system, $0/\infty$) Ett underbestämt linjärt ekvationssystem har antingen

(0) Ingen lösning, eller

(∞) Oändligt många lösningar = parameterlösning.

Sats: (Underbestämda homogena system, ∞) Ett underbestämt homogent linjärt ekvationssystem har alltid

(∞) Oändligt många lösningar = parameterlösning.