

1. Svar: a) $\frac{2}{3}$ b) 111111 c) $2 + \ln 2$ d) $\frac{\ln 2}{2}$

Lösningförslag:

$$\text{a)} \int_1^9 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3} - 4\sqrt{x} \right]_1^9 = 9 - 12 - \frac{1}{3} + 4 = \frac{2}{3}$$

$$\text{b)} \int_0^6 \left(1 + \frac{3x}{2} \right)^5 dx = \left[\frac{1}{9} \left(1 + \frac{3x}{2} \right)^6 \right]_0^6 = \frac{1}{9} (10^6 - 1) = \frac{999999}{9} = 111111$$

c) Polynomdivision ger att $x^2 = (x-1)(x+1) + 1$, och därmed är

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x^2}{x+1} dx &= \int_1^3 \frac{(x-1)(x+1) + 1}{x+1} dx = \int_1^3 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right]_1^3 = \frac{9}{2} - 3 + \ln 4 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = 2 + \ln 2. \end{aligned}$$

d) Variabelsubstitutionen $t = \cos x$ ger att

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \tan x dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x, \quad (-1) dt = \sin x dx \\ x = -\pi/4 \Rightarrow t = \cos(-\pi/4) = 1/\sqrt{2} \\ x = \pi/3 \Rightarrow t = \cos(\pi/3) = 1/2 \end{array} \right] \\ &= \int_{1/\sqrt{2}}^{1/2} \frac{1}{t} \cdot (-1) dt = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{t} dt = \left[\ln|t| \right]_{1/2}^{1/\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \ln \sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

2. Svar: $y(x) = (2x+1)e^{-2x} + x - 1$

Lösningförslag:

Det karakteristiska polynomet $r^2 + 4r + 4$ har nollstället -2 med multiplicitet 2, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = (C_1 x + C_2) e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ansatsen $y_p = Ax + B$, där $A, B \in \mathbb{R}$, ger vid insättning (med $y_p' = A$ och $y_p'' = 0$) att

$$0 + 4A + 4(Ax + B) = 4x \iff 4Ax + 4A + 4B = 4x$$

$$\iff \begin{cases} 4A = 4 \\ 4A + 4B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -1. \end{cases}$$

Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = x - 1$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2)e^{-2x} + x - 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = (-2C_1 x + C_1 - 2C_2)e^{-2x} + 1.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ erhålles att

$$\begin{cases} C_2 - 1 = 0 \\ C_1 - 2C_2 + 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = (2x + 1)e^{-2x} + x - 1.$$

3. Svar: a) $\frac{5}{3}$ b) $\pi(e - 2)$

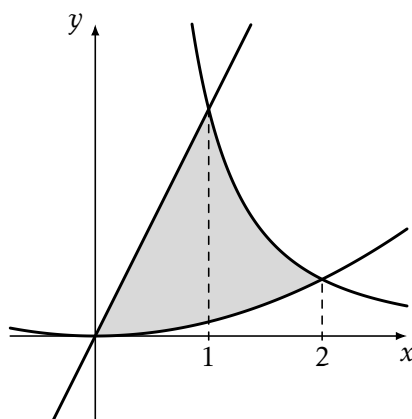
Lösningsförslag:

a) För att bestämma integrationsgränserna löser vi ekvationerna

$$2x = \frac{2}{x^2} \iff x^3 = 1 \iff x = 1,$$

och

$$\frac{x^2}{8} = \frac{2}{x^2} \iff x^4 = 16 \iff x = \pm 2.$$



Den sökta arean ges följaktligen av

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(2x - \frac{x^2}{8} \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{x^2}{8} \right) dx &= \left[x^2 - \frac{x^3}{24} \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{x} - \frac{x^3}{24} \right]_1^2 \\ &= 1 - \frac{1}{24} - 0 + 0 - 1 - \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{24} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

b) Med skivformeln erhålles den sökta volymen av integralen

$$\begin{aligned}\pi \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \pi \left(\left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \pi(e-0) - 2\pi \int_1^e \ln x dx \\ &= \pi e - 2\pi \left(\left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \pi e - 2\pi(e-0) + 2\pi \int_1^e 1 dx \\ &= \pi e - 2\pi e + 2\pi(e-1) = \pi(e-2).\end{aligned}$$

4. Svar: a) $y(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$ b) $y(x) = \frac{2}{\ln(1+x^2)+1}$

Lösningsförslag:

a) Notera att denna differentialekvation både är linjär och separabel. Nedan löser vi ekvationen med hjälp av integrerande faktor, men det går också att lösa den som en separabel differentialekvaion.

Division med $1+x^2$ ger att

$$(1+x^2)y' + xy = 0 \iff y' + \frac{xy}{1+x^2} = 0.$$

Eftersom

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

där $C \in \mathbb{R}$, så ges en integrerande faktor till differentialekvationen av

$$e^{(1/2)\ln(1+x^2)} = \left(e^{\ln(1+x^2)}\right)^{1/2} = (1+x^2)^{1/2} = \sqrt{1+x^2}.$$

Via multiplikation med $\sqrt{1+x^2}$ erhålles att

$$\begin{aligned}y' + \frac{xy}{1+x^2} = 0 &\iff y' \sqrt{1+x^2} + \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \iff \frac{d}{dx} \left(y \sqrt{1+x^2} \right) = 0 \\ &\iff y \sqrt{1+x^2} = \int 0 dx = B \iff y = \frac{B}{\sqrt{1+x^2}},\end{aligned}$$

där $B \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ innebär att

$$2 = \frac{B}{\sqrt{1+0^2}} \iff B = 2.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

b) Omskrivning och integrering ger att

$$\begin{aligned}(1+x^2)y' + xy^2 = 0 &\iff -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+x^2} \iff \int \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &\iff \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \iff y = \frac{2}{\ln(1+x^2) + 2C},\end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ implicerar att

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln(1+0^2) + C \iff C = \frac{1}{2}.$$

Begynnelsevärdesproblemet har följaktligen lösningen

$$y(x) = \frac{2}{\ln(1+x^2) + 1}.$$

5. Svar: a) $-\frac{1}{4}$ b) π

Lösningsförslag:

a) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3 samt B_4 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$\begin{aligned}\ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + t^3 B_1(t), \\ \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + t^4 B_2(t),\end{aligned}$$

och därmed är

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + (-x)^3 B_1(-x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_3(x)$$

och

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + (2x)^4 B_2(2x) = 1 - 2x^2 + x^4 B_4(x).$$

Sålunda gäller att

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + x \ln(1-x)}{x - x \cos(2x)} &= \frac{x^2 + x(-x - x^2/2 + x^3 B_3(x))}{x - x(1 - 2x^2 + x^4 B_4(x))} = \frac{-x^3/2 + x^4 B_3(x)}{2x^3 - x^5 B_4(x)} \\ &= \frac{-1/2 + x B_3(x)}{2 - x^2 B_4(x)} \longrightarrow \frac{-1/2 + 0}{2 - 0} = -\frac{1}{4}, \quad \text{då } x \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

b) Med rörformeln erhålles den sökta volymen av den generaliserade integralen

$$2\pi \int_0^\infty x \cdot x^2 e^{-x^2} dx = 2\pi \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx.$$

Beräkning av den obestämda integralen ger att

$$\begin{aligned} 2\pi \int x^3 e^{-x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right] = \pi \int t e^{-t} dt = \pi \left(t \cdot (-e^{-t}) - \int 1 \cdot (-e^{-t}) dt \right) \\ &= \pi (-te^{-t} - e^{-t}) + C = -\pi e^{-x^2} (x^2 + 1) + C, \end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Volymen är således

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx &= \lim_{X \rightarrow \infty} 2\pi \int_0^X x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{X \rightarrow \infty} \pi \left[-e^{-x^2} (x^2 + 1) \right]_0^X \\ &= \lim_{X \rightarrow \infty} \pi \left(-\frac{X^2 + 1}{e^{X^2}} + 1 \right) = \pi(0 + 1) = \pi. \end{aligned}$$

6. Svar: $\ln 3$

Lösningsförslag:

Enligt analysens huvudsats ges derivatan av F av

$$F'(x) = \frac{2x - 8}{x^2 - 4x - 12} = \frac{2x - 8}{(x + 2)(x - 6)},$$

och beräkning av stationära punkter ger att

$$F'(x) = 0 \iff 2x - 8 = 0 \iff x = 4.$$

Teckenstudium av F' ger följande data om restriktionen av F till intervallet $[0, 5]$:

	0	4	5	x
$2x - 8$	-	0	+	
$x + 2$	+	+	+	
$x - 6$	-	-	-	
$F'(x)$	+	0	-	
$F(x)$	lok. min.	lok. max.	lok. min.	

Det framgår av tabellen att det största värdet av F på det givna intervallet är

$$F(4) = \int_0^4 \frac{2t - 8}{t^2 - 4t - 12} dt.$$

Via partialbråksuppdelning erhålles att

$$\begin{aligned} F(4) &= \int_0^4 \frac{2t - 8}{(t + 2)(t - 6)} dt = \int_0^4 \left(\frac{3/2}{t + 2} + \frac{1/2}{t - 6} \right) dt = \frac{1}{2} \left[3 \ln|t + 2| + \ln|t - 6| \right]_0^4 \\ &= \frac{1}{2} (3 \ln 6 + \ln 2 - 3 \ln 2 - \ln 6) = \ln 3. \end{aligned}$$