**Matematik LTH** **Lösningar: 2022–03–18**
**Matematikcentrum** **FMA A50**
**Lunds universitet** **Analys 2**

**1. a)**

$$\int (-5\sin(x))^3 \cdot \cos(x)dx = -5^3 \int \sin^3(x) \cdot \cos(x)dx = -125 \cdot \frac{\sin^4(x)}{4} + C$$

där $C$ är en konstant.

**b)**

$$\int \frac{1}{3+x^2}dx = \int \frac{1}{3\left(1+\frac{x^2}{3}\right)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{1}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

där $C$ är en konstant.

**c)**

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^2 \frac{1+x-x}{x(x+1)}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= [\ln(|x|) - \ln(|x+1|)]_1^2 = \left[\ln\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)\right]_1^2$$

$$= \ln(2/3) - \ln(1/2) = \ln(4/3).$$

**Anm.** Istället för ”tricket” ovan i första likheten kan partialbråksuppdelning göras på vanligt sätt genom ansatsen

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

**2. a)** Denna differentialekvation kan lösas med IF-metoden.

$$xy' + y = 2x \iff y' + \frac{1}{x} \cdot y = 2.$$

Här är $g(x) = 1/x$ vilket ger $G(x) = \ln(x)$ (notera att $x > 0$). Den integrerande faktorn, IF, blir IF $= e^{\ln(x)} = x$. Detta ger

$$xy' + y = 2x \iff (y \cdot x)' = 2x \iff y \cdot x = x^2 + C \iff y = x + \frac{C}{x}.$$

**b)** Denna differentialekvation kan lösas med metoden för separabla variabler.

$$x^2yy' = 1 + x^2 \iff \int y dy = \int \frac{1+x^2}{x^2}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

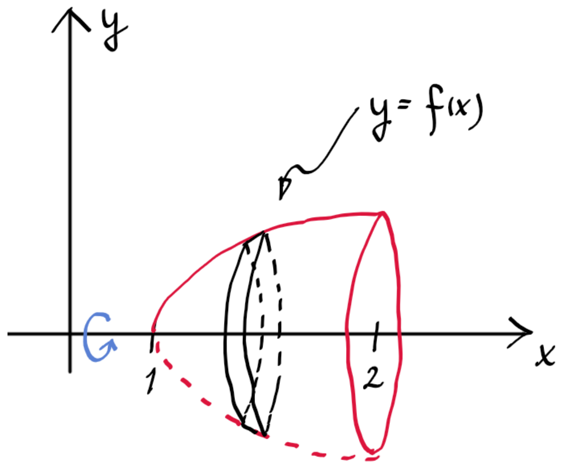
Detta ger

$$\frac{y^2}{2} = x - \frac{1}{x} + C \iff y = {\scriptstyle(\overset{+}{-})}\sqrt{2x - \frac{2}{x} + D}$$

där $D = 2C$. Villkoret $y(2) = 2$ ger att $D = 1$.

Svar: $y = \sqrt{2x - \frac{2}{x} + 1}$

**3. a)** Då $y = \sqrt{\ln(x)/x}$, $1 \leq x \leq 2$ roterar kring $x$-axeln genereras en rotationskropp enligt figuren nedan.



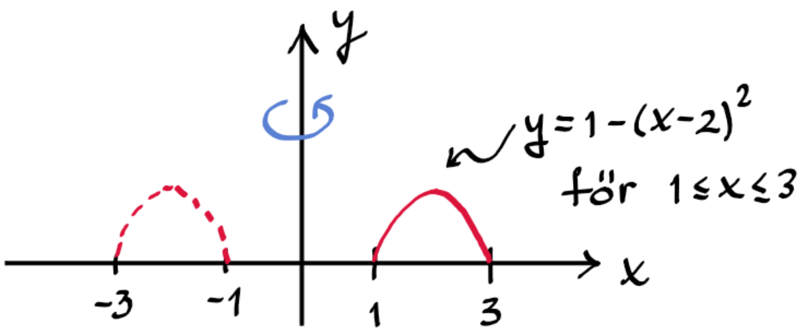

Rotationsvolymen blir

$$V = \int_1^2 \pi y^2 dx = \int_1^2 \pi \frac{\ln(x)}{x} dx = \left\{ \text{Notera att } \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \right\}$$
$$= \pi \left[ \frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_1^2 = \pi \cdot \frac{(\ln(2))^2}{2}.$$

**b)** Vid rotation kring $y$-axeln av området mellan kurvan

$$y = 1 - (x-2)^2, \quad 1 \leq x \leq 3,$$

och $x$-axeln uppkommer en ringformad kropp (se skiss nedan).




Rotationsvolymen blir

$$V = \int_1^3 2\pi x f(x) dx = 2\pi \int_1^3 x(1-(x-2)^2) dx = 2\pi \int_1^3 x(1-(x^2-4x+4)) dx$$
$$= 2\pi \int_1^3 (-3x + 4x^2 - x^3) dx = 2\pi \left[ -3 \cdot \frac{x^2}{2} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \frac{16\pi}{3}.$$

**4.** **a)** Notera att

$$g(x) = \frac{1}{x^{1/3}-2} > \frac{1}{x^{1/3}} = f(x) > 0$$

på intervallet $x \geq 9$. Vidare gäller att $\int_9^\infty f(x)dx$ är divergent ty

$$\int_9^T \frac{1}{x^{1/3}}dx = \int_9^T x^{-1/3}dx = \left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_9^T = \frac{3}{2}\cdot(T^{2/3}-9^{2/3}) \to \infty, \quad \text{då } T \to \infty.$$

**Anm.** Alternativt kan Sats 13.11(1) + Anm. 13.5 åberopas gällande divergens av denna integral.

Eftersom $\int_9^\infty f(x)dx$ är divergent, så måste även $\int_9^\infty g(x)dx$ vara divergent enligt jämförelsesats 13.10(2).

**b)** Låt $B_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ vara begränsade funktioner nära $x = 0$. Maclaurinutvecklingar ger

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2x + x^3B_1(x) \\
e^{4x^2} &= 1 + 4x^2 + x^4B_2(x) \\
\ln(1+4x) &= 4x - \frac{(4x)^2}{2} + x^3B_3(x)
\end{aligned}$$

Detta ger gränsvärdet

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(2x) - \ln(1+4x) + 2x}{e^{4x^2}-1} &= \frac{2x + x^3B_1(x) - (4x - \frac{(4x)^2}{2} + x^3B_3(x)) + 2x}{1 + 4x^2 + x^4B_2(x) - 1} \\
&= \frac{8x^2 + x^3B_4(x)}{4x^2 + x^4B_2(x)} \\
&= \frac{8 + xB_4(x)}{4 + x^2B_2(x)} \to 2, \quad \text{då } x \to 0.
\end{aligned}$$

**5.** Vi vill lösa ekvationen

$$y'' - 3y' - 4y = 5e^{-x} + 4x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \tag{1}$$

**Homogen lösning:** Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 3r - 4 = 0$ har lösningen $r_1 = 4$ och $r_2 = -1$. Dvs,

$$y_h = C_1e^{4x} + C_2e^{-x}.$$

**Partikulär lösning 1:** Här vill vi hitta *en* lösning till

$$y'' - 3y' - 4y = 5e^{-x} \tag{2}$$

Gör ansatsen $y_{p_1} = z(x)\cdot e^{-x}$. Detta ger

$$\begin{aligned}
y_{p_1}' &= e^{-x}(z' - z) \\
y_{p_1}'' &= e^{-x}(z'' - 2z' + z).
\end{aligned}$$

Insättning i (2) ger

$$e^{-x}(z'' - 2z' + z) - 3e^{-x}(z' - z) - 4ze^{-x} = 5e^{-x}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$z'' - 5z' = 5 \tag{2'}$$

Ansätt lösningen $z = A \cdot x$ till (2′), där $A$ är en konstant. Detta ger att $z' = A$ och $z'' = 0$, vilket betyder att $-5A = 5 \Leftrightarrow A = -1$. Dvs, $z = -x$, och en partikulärlösning till (2) blir

$$y_{p_1} = -xe^{-x}.$$

**Partikulär lösning 2:** Här vill vi hitta *en* lösning till

$$y'' - 3y' - 4y = 4x \tag{3}$$

Gör ansatsen $y_{p_2} = Ax + B$, där $A$ och $B$ är konstanter. Det betyder att $y'_{p_2} = A$ och $y''_{p_2} = 0$. Insatt i (3) ger $-3A - 4(Ax + B) = 4x$. Identifiering av koefficienter ger följande linjära ekvationssystem

$$\begin{cases} -3A - 4B = 0 \\ -4A \phantom{- 4B} = 4 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Detta ger partikulärlösningen

$$y_{p_2} = -x + \frac{3}{4}.$$

**Total lösning:**

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} - xe^{-x} - x + \frac{3}{4} \tag{4}$$

Det återstår att bestämma konstanterna $C_1$ och $C_2$ i (4). För att kunna göra det tar vi först fram uttrycket för $y'$,

$$y' = 4C_1e^{4x} - C_2e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) - 1.$$

Begynnelsevillkoren i (1) ger

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{3}{4} = 1$$
$$y'(0) = 4C_1 - C_2 - 2 = -1$$

Detta linjära ekvationssystem har lösningen $C_1 = 1/4$, $C_2 = 0$, vilket resulterar i den slutliga lösningen

$$\text{Svar: } y = \frac{1}{4}e^{4x} - xe^{-x} - x + \frac{3}{4}$$

**6.** Notera först att enligt analysens huvudsats (Sats 13.6) gäller

$$u'(x) = \frac{x}{\sin(x)}.$$

Genom att använda partialintegration fås

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} u(x)\cdot\cos(2x)dx &= \underbrace{\left[\frac{\sin(2x)}{2}\cdot u(x)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2x)}{2}\cdot u'(x)dx \\
&= -\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin(x)\cos(x)}{2}\cdot\frac{x}{\sin(x)}dx \\
&= -\int_0^{\pi/2} x\cdot\cos(x)dx \\
&= -\left([\sin(x)\cdot x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin(x)dx\right) \\
&= -\left(\frac{\pi}{2} + [\cos(x)]_0^{\pi/2}\right) \\
&= 1 - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Alltså,

$$\text{Svar: } \int_0^{\pi/2} u(x)\cdot\cos(2x)dx = 1 - \frac{\pi}{2}$$