LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
FMAA50 – Analys 2
2026-04-16 kl. 8.00–13.00

1. Svar: a) 12 **b)** $\dfrac{8}{5}$ **c)** $\ln 2$ **d)** $\ln 3$

Lösningsförslag:

a) $\displaystyle\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_0^8 = \frac{3}{4}(16-0) = 12$

b) Variabelsubstitutionen $t = 3 - x$ ger att

$$\int_2^3 x\sqrt{3-x}\,dx = \begin{bmatrix} t = 3-x, \quad x = 3-t, \quad dx = (-1)\,dt \\ x = 2 \Rightarrow t = 1, \quad x = 3 \Rightarrow t = 0 \end{bmatrix} = \int_1^0 (3-t)\sqrt{t}\cdot(-1)\,dt$$
$$= \int_0^1 \left(3\sqrt{t} - t\sqrt{t}\right)dt = \left[2t^{3/2} - \frac{2}{5}t^{5/2}\right]_0^1 = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}.$$

c) $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^4 \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+4\right)\right]_{-1}^4 = \frac{1}{2}(\ln 20 - \ln 5) = \ln 2$

d) Via partialbråksuppdelning erhålles att

$$\int_3^8 \frac{4}{x^2-4}\,dx = \int_3^8 \frac{4}{(x-2)(x+2)}\,dx = \int_3^8 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$= \Big[\ln|x-2| - \ln|x+2|\Big]_3^8 = \ln 6 - \ln 10 - \ln 1 + \ln 5 = \ln 3.$$

2. Svar: a) $y(x) = x + \sqrt{x}$ **b)** $y(x) = \sqrt{2 - \cos\left(x^2\right)}$

Lösningsförslag:
a) Division med $2x$ ger att

$$2xy' - y = x \quad\Longleftrightarrow\quad y' - \frac{y}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Via multiplikation med den integrerande faktorn $e^{-(\ln x)/2} = 1\big/\sqrt{x}$ erhålles att

$$y' - \frac{y}{2x} = \frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{y'}{\sqrt{x}} - \frac{y}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\Longleftrightarrow\quad \frac{y}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C \quad\Longleftrightarrow\quad y = x + C\sqrt{x},$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 2$ innebär att

$$2 = 1 + C\sqrt{1} \quad\Longleftrightarrow\quad C = 1.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = x + \sqrt{x}.$$

b) Omskrivning och integrering ger att

$$yy' = x\sin\left(x^2\right) \iff y\frac{dy}{dx} = x\sin\left(x^2\right) \iff \int y\,dy = \int x\sin\left(x^2\right)dx$$

$$\iff \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) + C \iff y^2 = B - \cos\left(x^2\right),$$

där $C \in \mathbb{R}$ och $B = 2C$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ implicerar att

$$1^2 = B - \cos\left(0^2\right) \iff B = 2.$$

Begynnelsevärdesproblemet har följaktligen lösningen

$$y(x) = \sqrt{2 - \cos\left(x^2\right)}.$$

3. Svar: a) $\dfrac{\pi^2}{4}$ **b)** $\pi(\pi - 2)$

Lösningsförslag:
a) Med skivformeln erhålles den sökta volymen av integralen

$$\pi\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \pi\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \pi\left(\frac{\pi}{4} + 0 - 0 - 0\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

b) Rörformeln ger att den sökta volymen är

$$2\pi\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = 2\pi\left(\Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1\cdot\sin x\,dx\right) = 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - (0+1)\right) = \pi(\pi - 2).$$

4. Svar: $y(x) = (x+2)e^x - e^{-2x}$

Lösningsförslag:
Det karakteristiska polynomet r^2+r-2 har nollställena -2 respektive 1, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Med ansatsen $y_p = z(x)e^x = ze^x$ är

$$y_p' = \left(z' + z\right)e^x,$$
$$y_p'' = \left(z'' + 2z' + z\right)e^x,$$

vilket vid insättning i differentialekvationen ger att

$$\Big(z'' + 2z' + z\Big)e^x + \Big(z' + z\Big)e^x - 2ze^x = 3e^x \quad \Longleftrightarrow \quad z'' + 3z' = 3.$$

Ansatsen $z_p = Ax$, där $A \in \mathbb{R}$, ger vid insättning (med $z_p' = A$ och $z_p'' = 0$) att

$$0 + 3A = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 1.$$

Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = xe^x$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + (x + C_2)e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + (x + C_2 + 1)e^x.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 5$ erhålles att

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + C_2 + 1 = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 + C_2 = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = -e^{-2x} + (x + 2)e^x.$$

5. Svar: a) $2x - 2x^2 - \dfrac{x^3}{3} + x^4$; $f^{(4)}(0) = 24$ **b)** $4\pi - \sqrt{3}$

Lösningsförslag:

a) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3, B_4 samt B_5 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^4 B_1(t),$$
$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^5 B_2(t),$$

och därmed är

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{6} + (-x)^4 B_1(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^4 B_3(x)$$

och

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + (2x)^5 B_2(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + x^5 B_4(x).$$

Sålunda gäller att

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-x}\sin(2x) &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^4 B_3(x)\right)\left(2x - \frac{4x^3}{3} + x^5 B_4(x)\right) \\ &= 2x - \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + \frac{4x^4}{3} + x^3 - \frac{x^4}{3} + x^5 B_5(x) = 2x - 2x^2 - \frac{x^3}{3} + x^4 + x^5 B_5(x), \end{aligned}$$

varav det (enligt entydighetssatsen för Maclaurinutveckling) följer att Maclaurinpolynomet till f av ordning 4 ges av

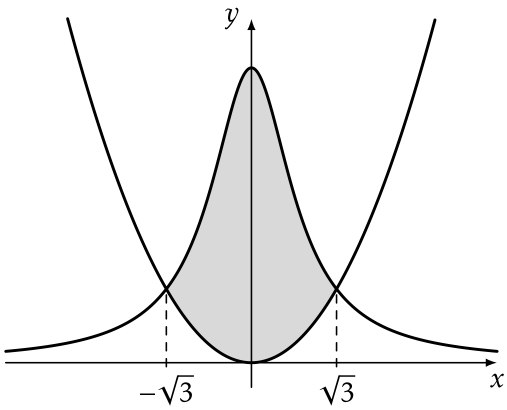
$$2x - 2x^2 - \frac{x^3}{3} + x^4.$$

Koefficienten framför x^4 i detta polynom ges av $f^{(4)}(0)/4!$, och följaktligen är

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad f^{(4)}(0) = 4! = 24.$$

b) Skärningspunkterna mellan kurvorna $y = 6\big/\big(1+x^2\big)$ och $y = x^2/2$ bestäms av att

$$\frac{6}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x^4 + x^2 - 12 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 3 \quad \big(\text{eller} \quad x^2 = -4\big)$$
$$\Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}.$$



Den sökta arean ges av integralen

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{6}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[6 \arctan x - \frac{x^3}{6} \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 6 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \left(-\frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\pi - \sqrt{3}.$$

6. Svar: Iskuben är borta fem timmar efter att den börjat smälta.

Lösningsförslag:
Låt $V(t)$, $A(t)$ och $s(t)$ beteckna iskubens volym, begränsningsarea respektive sidlängd (i lämpliga enheter) efter tiden t timmar, där $t = 0$ svarar mot tidpunkten då smältförloppet startar. Då är $V = s^3$ och $A = 6s^2$, och sålunda gäller att

$$V' = -kA \quad \Longleftrightarrow \quad \big(s^3\big)' = -k \cdot 6s^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3s^2 s' = -6ks^2 \quad \Longleftrightarrow \quad s' = -2k$$
$$\Longleftrightarrow \quad s = -2kt + C,$$

där $k > 0$ är en proportionalitetskonstant och $C \in \mathbb{R}$. Låter vi $s(0) = s_0$ så är $C = s_0$, och därmed erhålles att

$$s(t) = s_0 - 2kt.$$

Eftersom

$$\big(s(1)\big)^3 = V(1) = 0{,}512V(0) = 0{,}512s_0^3 = \frac{64}{125}s_0^3 \quad\Longleftrightarrow\quad s(1) = \frac{4}{5}s_0,$$

så måste

$$s_0 - 2k = s(1) = \frac{4}{5}s_0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2k = \frac{s_0}{5}.$$

Detta innebär att

$$s(t) = s_0 - 2kt = s_0 - \frac{s_0}{5}t = s_0\left(1 - \frac{t}{5}\right).$$

Om t_1 betecknar tidpunkten då iskuben försvinner så gäller att

$$0 = s(t_1) = s_0\left(1 - \frac{t_1}{5}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad t_1 = 5,$$

vilket betyder att iskuben har smält bort efter fem timmar.