

1. Svar: a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{1}{24}$ c) 6 d) $(2x-4)e^{x/2} + C$ ($C \in \mathbb{R}$)

Lösningförslag:

$$\text{a) } \int_1^2 (3x-4)^5 dx = \left[\frac{1}{18} (3x-4)^6 \right]_1^2 = \frac{1}{18} (64-1) = \frac{7}{2}$$

$$\text{b) } \int_1^2 \left(\frac{4}{x^4} - \frac{3}{x^3} \right) dx = \left[-\frac{4}{3x^3} + \frac{3}{2x^2} \right]_1^2 = -\frac{1}{6} + \frac{3}{8} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{24}$$

c) Variabelsubstitutionen $t = \cos x$ ger att

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/3}^{\pi} (3+4\cos^2 x) \sin x dx &= \left[\begin{array}{l} t = \cos x, \quad (-1) dt = \sin x dx \\ x = -\pi/3 \Rightarrow t = 1/2, \quad x = \pi \Rightarrow t = -1 \end{array} \right] \\ &= \int_{1/2}^{-1} (3+4t^2) \cdot (-1) dt = \int_{-1}^{1/2} (3+4t^2) dt = \left[3t + \frac{4t^3}{3} \right]_{-1}^{1/2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{6} + 3 + \frac{4}{3} = 6. \end{aligned}$$

d) Via partialintegrering erhålles att

$$\int x e^{x/2} dx = x \cdot 2e^{x/2} - \int 1 \cdot 2e^{x/2} dx = 2xe^{x/2} - 4e^{x/2} + C = (2x-4)e^{x/2} + C,$$

där $C \in \mathbb{R}$.

2. Svar: $y(x) = e^{-x}(3 \cos x + 2 \sin x) + 2x - 2$

Lösningförslag:

Det karakteristiska polynomet $r^2 + 2r + 2$ har nollställena $-1 \pm i$, och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ansatsen $y_p = Ax + B$, där $A, B \in \mathbb{R}$, ger vid insättning (med $y_p' = A$ och $y_p'' = 0$) att

$$0 + 2A + 2(Ax + B) = 4x \iff 2Ax + 2A + 2B = 4x$$

$$\iff \begin{cases} 2A = 4 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 2 \\ B = -2. \end{cases}$$

Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = 2x - 2$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2x - 2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = e^{-x}((-C_1 + C_2)\cos x + (-C_1 - C_2)\sin x) + 2.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 1$ erhålles att

$$\begin{cases} C_1 - 2 = 1 \\ -C_1 + C_2 + 2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = e^{-x}(3\cos x + 2\sin x) + 2x - 2.$$

3. Svar: a) $\pi \ln 3$ b) 24π

Lösningsförslag:

a) Med skivformeln erhålles den sökta volymen av integralen

$$\pi \int_2^8 \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)^2 dx = \pi \int_2^8 \frac{1}{x+1} dx = \pi \left[\ln|x+1| \right]_2^8 = \pi(\ln 9 - \ln 3) = \pi \ln 3.$$

b) Rörformeln ger att den sökta volymen är

$$\begin{aligned} 2\pi \int_2^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x+1}, \quad x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt \\ x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{3}, \quad x = 8 \Rightarrow t = 3 \end{array} \right] \\ &= 2\pi \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{t^2 - 1}{t} \cdot 2t dt = 4\pi \int_{\sqrt{3}}^3 (t^2 - 1) dt = 4\pi \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_{\sqrt{3}}^3 \\ &= 4\pi(9 - 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3}) = 24\pi. \end{aligned}$$

4. Svar: a) $y(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ b) $y(x) = x(\ln x)^2$

Lösningsförslag:

a) Omskrivning och integrering ger att

$$\begin{aligned} y' + (2x+1)y^2 &= 0 \iff \stackrel{y \neq 0}{-} \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = 2x+1 \\ &\iff \int \left(-\frac{1}{y^2} \right) dy = \int (2x+1) dx \\ &\iff \frac{1}{y} = x^2 + x + C \iff y = \frac{1}{x^2 + x + C}, \end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Notera att vi, på grund av begynnelsevillkoret $y(0) = 1$, kan anta att $y \neq 0$ i uträkningen ovan. Villkoret implicerar att

$$\frac{1}{1} = 0^2 + 0 + C \iff C = 1.$$

Begynnelsevärdesproblemet har följaktligen lösningen

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

b) Division med x ger att

$$xy' - y = 2x \ln x \iff y' - \frac{y}{x} = 2 \ln x.$$

(Eftersom uttrycket $\ln x$ förekommer i differentialekvationen är det underförstått att $x > 0$.) Via multiplikation med den integrerande faktorn $e^{-\ln x} = 1/x$ erhålles att

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x} = 2 \ln x &\iff \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{2 \ln x}{x} \\ &\iff \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{2 \ln x}{x} \iff \frac{y}{x} = \int \frac{2 \ln x}{x} dx. \end{aligned}$$

Beräkningen

$$\int \frac{2 \ln x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = (1/x) dx \end{array} \right] = \int 2t dt = t^2 + C = (\ln x)^2 + C,$$

där $C \in \mathbb{R}$, leder till att

$$\frac{y}{x} = (\ln x)^2 + C \iff y = x(\ln x)^2 + Cx.$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ innebär att

$$0 = 1 \cdot (\ln 1)^2 + C \cdot 1 \iff C = 0.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = x(\ln x)^2.$$

5. Svar: a) -9 b) $\ln 3$

Lösningsförslag:

a) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3 samt B_4 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$\begin{aligned} \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + t^4 B_1(t), \\ e^t &= 1 + t + t^2 B_2(t), \end{aligned}$$

och därmed är

$$\cos(3x) = 1 - \frac{(3x)^2}{2} + (3x)^4 B_1(3x) = 1 - \frac{9x^2}{2} + x^4 B_3(x)$$

och

$$e^{x^2/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 B_2\left(\frac{x^2}{2}\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^4 B_4(x).$$

Sålunda gäller att

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos(3x)}{1 - e^{x^2/2}} &= \frac{1 - (1 - 9x^2/2 + x^4 B_3(x))}{1 - (1 + x^2/2 + x^4 B_4(x))} = \frac{9x^2/2 - x^4 B_3(x)}{-x^2/2 - x^4 B_4(x)} \\ &= \frac{9/2 - x^2 B_3(x)}{-1/2 - x^2 B_4(x)} \longrightarrow \frac{9/2 - 0}{-1/2 - 0} = -9, \quad \text{då } x \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

b) Tredjegradspolynomet i integrandens nämnare har nollställena 0, -1 respektive -2, och faktoriseras därmed som $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$. Via partialbråksuppdelning erhålles att

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{3x+4}{x^3+3x^2+2x} dx &= \int_2^\infty \frac{3x+4}{x(x+1)(x+2)} dx = \int_2^\infty \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \left[2\ln|x| - \ln|x+1| - \ln|x+2| \right]_2^\infty = \left[\ln \left| \frac{x^2}{x^2+3x+2} \right| \right]_2^\infty \\ &= \lim_{X \rightarrow \infty} \left(\ln \left(\frac{X^2}{X^2+3X+2} \right) + \ln 3 \right) = \ln 1 + \ln 3 = \ln 3. \end{aligned}$$

6. Svar: $y(t) = 9 - 6e^{-t/15}$ kg

Lösningsförslag:

Låt $y(t)$ beteckna mängden salt (i kilogram) som finns i tanken efter tiden t minuter från att processen startat. Då uppfyller y differentialekvationen

$$y' = 0,12 \cdot 5 - \frac{y}{75} \cdot 5 \iff y' + \frac{y}{15} = \frac{3}{5}.$$

Multiplikation med den integrerande faktorn $e^{t/15}$ ger att

$$\begin{aligned} y' e^{t/15} + \frac{y}{15} e^{t/15} &= \frac{3}{5} e^{t/15} \iff \frac{d}{dt} (y e^{t/15}) = \frac{3}{5} e^{t/15} \\ &\iff y e^{t/15} = \int \frac{3}{5} e^{t/15} dt = 9 e^{t/15} + C \\ &\iff y = 9 + C e^{-t/15}, \end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0,04 \cdot 75 = 3$ innebär att $C = -6$ och därmed gäller att

$$y(t) = 9 - 6e^{-t/15}.$$