

1. Svar: a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{\pi - 2}{8}$ c) $\ln 3$

Lösningförslag:

$$\text{a) } \int_{1/9}^{1/4} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_{1/9}^{1/4} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}$$

c) Andragradspolynomet i integrandens nämnare har nollställena -1 respektive -3 , och faktoriseras därmed som $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$. Via partialbråksuppdelning erhålles sedan att

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x + 5}{x^2 + 4x + 3} dx &= \int_0^1 \frac{x + 5}{(x + 1)(x + 3)} dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x + 3} \right) dx = \\ &= \left[2 \ln|x + 1| - \ln|x + 3| \right]_0^1 = 2 \ln 2 - \ln 4 - 2 \ln 1 + \ln 3 = \ln 3. \end{aligned}$$

2. Svar: a) $y(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{2}$ b) $y(x) = 2 \ln x - 1 + \frac{2}{x^2}$

Lösningförslag:

a) Omskrivning och integrering ger att

$$\begin{aligned} e^{2y} y' &= x &\iff e^{2y} \frac{dy}{dx} &= x &\iff \int e^{2y} dy &= \int x dx \\ &&\iff \frac{e^{2y}}{2} &= \frac{x^2}{2} + C &\iff e^{2y} &= x^2 + 2C \\ &&\iff y &= \frac{\ln(x^2 + 2C)}{2}, \end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ innebär att

$$\frac{e^{2 \cdot 0}}{2} = \frac{0^2}{2} + C \iff C = \frac{1}{2}.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{2}.$$

b) Division med x ger att

$$xy' + 2y = 4 \ln x \iff y' + \frac{2}{x}y = \frac{4 \ln x}{x}.$$

Via multiplikation med den integrerande faktorn $e^{2\ln x} = (e^{\ln x})^2 = x^2$ erhålles sedan att

$$\begin{aligned}y' + \frac{2}{x}y &= \frac{4 \ln x}{x} \iff x^2 y' + 2xy = 4x \ln x \iff \frac{d}{dx}(x^2 y) = 4x \ln x \\ \iff x^2 y &= \int 4x \ln x \, dx = 2x^2 \ln x - \int 2x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = 2x^2 \ln x - x^2 + C \\ \iff y &= 2 \ln x - 1 + \frac{C}{x^2},\end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ innebär att

$$1 = 2 \ln 1 - 1 + \frac{C}{1^2} \iff C = 2.$$

Sålunda har begynnelsevärdesproblemet lösningen

$$y(x) = 2 \ln x - 1 + \frac{2}{x^2}.$$

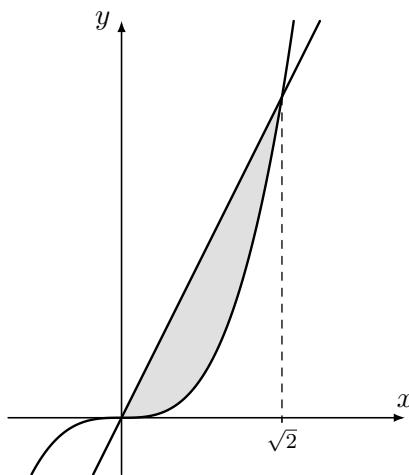
3. Svar: a) 1 b) $\frac{\pi^2}{3}$

Lösningsförslag:

a) Skärningspunkterna mellan kurvan $y = x^3$ och linjen $y = 2x$ bestäms av att

$$x^3 = 2x \iff x = 0 \text{ eller } x = \pm\sqrt{2}.$$

Det aktuella området framgår av figuren nedan.



Den sökta arean ges av integralen

$$\int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3) \, dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2 - 1 = 1.$$

b) Med skivformeln erhålles den efterfrågade volymen av integralen

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \right)^2 dx &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{x^2+1} dx = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1} dx = \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right]_0^{\sqrt{3}} = \\ &= \pi \left(\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

4. Svar: $y(x) = -4e^{-2x} + 8e^{-x} - e^x + 2x - 3$

Lösningförslag:

Det karakteristiska polynomet $r^2 + 3r + 2$ har nollställena -2 respektive -1 , och därmed är den allmänna lösningen till motsvarande homogena differentialekvation

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Om y_{p_1} är en lösning till

$$y'' + 3y' + 2y = -6e^x \quad (1)$$

och y_{p_2} är en lösning till

$$y'' + 3y' + 2y = 4x \quad (2)$$

så löser $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ den givna differentialekvationen. Ansatsen $y_{p_1} = Ce^x$, där $C \in \mathbb{R}$, ger vid insättning i (1) att

$$Ce^x + 3Ce^x + 2Ce^x = -6e^x \iff C = -1,$$

vilket innebär att $y_{p_1} = -e^x$. Ansatsen $y_{p_2} = Ax + B$, där $A, B \in \mathbb{R}$, ger vid insättning i (2) att

$$0 + 3A + 2(Ax + B) = 4x \iff 2Ax + 3A + 2B = 4x$$

$$\iff \begin{cases} 2A &= 4 \\ 3A + 2B &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 2 \\ B &= -3, \end{cases}$$

och därmed är $y_{p_2} = 2x - 3$. Sålunda har vi partikulärlösningen $y_p = -e^x + 2x - 3$, och det följer att den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - e^x + 2x - 3, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Derivering ger att

$$y' = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x} - e^x + 2.$$

Från begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ erhålles att

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 - 3 = 0 \\ -2C_1 - C_2 - 1 + 2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -2C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = 8. \end{cases}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$y(x) = -4e^{-2x} + 8e^{-x} - e^x + 2x - 3.$$

5. Svar: a) -6 b) Konvergent

Lösningsförslag:

a) Nedan betecknar B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 samt B_6 funktioner som är begränsade i en omgivning av 0. Från kända Maclaurinutvecklingar har vi att

$$\begin{aligned}\sin t &= t + t^3 B_1(t), \\ e^t &= 1 + t + t^2 B_2(t), \\ \arctan t &= t - \frac{t^3}{3} + t^5 B_3(t),\end{aligned}$$

och därmed är

$$\sin(x^2) = x^2 + (x^2)^3 B_1(x^2) = x^2 + x^6 B_4(x)$$

och

$$e^{2x} = 1 + 2x + (2x)^2 B_2(2x) = 1 + 2x + x^2 B_5(x).$$

Sålunda gäller att

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x^2) - x^2 e^{2x}}{x - \arctan x} &= \frac{x^2 + x^6 B_4(x) - x^2(1 + 2x + x^2 B_5(x))}{x - (x - \frac{x^3}{3} + x^5 B_3(x))} = \\ &= \frac{-2x^3 + x^4 B_6(x)}{\frac{x^3}{3} - x^5 B_3(x)} = \frac{-2 + x B_6(x)}{\frac{1}{3} - x^2 B_3(x)} \rightarrow \frac{-2 + 0}{\frac{1}{3} - 0} = -6, \quad \text{då } x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

b) För $x \geq 1$ gäller att

$$0 \leq \frac{x}{x^3 + \ln x} \leq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Vidare vet vi (från sats 13.11) att $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ är konvergent, och sålunda måste (enligt sats 13.10) även den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^3 + \ln x} dx$$

vara konvergent.

6. Svar: a) T.ex. $y(t) = 22 + 48 \cdot 2^{-t/10}$ (t tiden i minuter) b) 10 minuter

Lösningsförslag:

a) Låt $y(t)$ beteckna kroppens temperatur i grader Celsius efter tiden t minuter, där $t = 0$ svarar mot tidpunkten då temperaturen är 70°C . Då uppfyller y differentialekvationen

$$y' = -k(y - 22) \iff y' + ky = 22k,$$

där k är en konstant. Multiplikation med den integrerande faktorn e^{kt} ger att

$$\begin{aligned}y' e^{kt} + k y e^{kt} = 22k e^{kt} &\iff \frac{d}{dt} (y e^{kt}) = 22k e^{kt} \\ &\iff y e^{kt} = \int 22k e^{kt} dt = 22e^{kt} + C \\ &\iff y = 22 + C e^{-kt},\end{aligned}$$

där $C \in \mathbb{R}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 70$ ger att $C = 48$ och därmed gäller att

$$y(t) = 22 + 48e^{-kt}.$$

Vidare ger villkoret $y(30) = 28$ att

$$\begin{aligned} 22 + 48e^{-30k} = 28 &\iff e^{-30k} = \frac{1}{8} &\iff -30k = \ln \frac{1}{8} = -3 \ln 2 \\ & &\iff k = \frac{\ln 2}{10}. \end{aligned}$$

Sålunda är

$$y(t) = 22 + 48e^{-\frac{\ln 2}{10}t} = 22 + 48 \cdot 2^{-t/10}.$$

b) För att bestämma tidpunkten t_1 då kroppens temperatur är 25°C så löser vi ekvationen

$$\begin{aligned} y(t_1) = 25 &\iff 22 + 48 \cdot 2^{-t_1/10} = 25 &\iff 2^{t_1/10} = 16 \\ & &\iff \frac{t_1}{10} = 4 &\iff t_1 = 40. \end{aligned}$$

Följaktligen tar det 10 minuter för att kroppens temperatur ska sjunka från 28°C till 25°C .