Lunds Tekniska Högskola **Lösningar**
Matematik **Analys 2, FMAA50**
Helsingborg **2022-08-15**

1. a) Arean blir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\tfrac{1}{2}\cdot(-1) - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot 1 = 1.$$

b) Trådens massa är

$$\int_0^3 \rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-2(x+1)^{-1}\right]_0^3 = -2\cdot\tfrac{1}{4} - (-2)\cdot 1 = \tfrac{3}{2}.$$

2. a) Partialintegration ger

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\cdot\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{8}{3}\cdot\ln(2) - 0 - \int_1^2 \tfrac{1}{3}x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{8}{3}\cdot\ln(2) - \left[\tfrac{1}{9}x^3\right]_1^2\\ &= \tfrac{8}{3}\cdot\ln(2) - \tfrac{7}{9}.\end{aligned}$$

b) Från partialbråksuppdelningsansatsen

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2},$$

ger multiplikation med $x(x+2)$ på båda sidor att

$$1 = A(x+2) + Bx. \tag{1}$$

Insättning av $x = -2$ och $x = 0$ ger

$$1 = A\cdot 0 + B\cdot(-2) \iff B = -\tfrac{1}{2}, \qquad 1 = A\cdot 2 + B\cdot 0 \iff A = \tfrac{1}{2}.$$

Alltså gäller

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{1}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x &= \int_2^4 \frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\tfrac{1}{2}\ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln|x+2|\right]_2^4\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\right]_2^4\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\ln(4/6) - \ln(1/2)\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{4/6}{1/2}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\ln(4/3)\\ &= \ln(2) - \tfrac{1}{2}\ln(3).\end{aligned}$$

c) Enligt definitionen av det generaliserade integral gäller

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}/2}^{\infty} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{X\to\infty} \int_{\sqrt{3}/2}^{X} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{X\to\infty} \int_{\sqrt{3}/2}^{X} \frac{1}{(2x)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{X\to\infty} \left[\tfrac{1}{2}\arctan(2x)\right]_{\sqrt{3}/2}^{X} \\
&= \lim_{X\to\infty} \tfrac{1}{2}\arctan(2X) - \tfrac{1}{2}\arctan\left(\sqrt{3}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{3} \\
&= \tfrac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

3. a) Differentialekvationen är separabel

$$\begin{aligned}
e^{-x^2}\cdot\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\cdot\sqrt{y} &\iff y^{-1/2}\,\mathrm{d}y = x\cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\iff \int y^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \int x\cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\iff 2y^{1/2} = \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C \\
&\iff y^{1/2} = \frac{1}{4}\left(e^{x^2}+2C\right) = \frac{1}{4}\left(e^{x^2}+D\right) \\
&\iff y = \frac{1}{16}\left(e^{x^2}+D\right)^2,
\end{aligned}$$

där D är en godtycklig reel konstant.

b) Vi använder metoden med integrerande faktor. Vi har $g(x) = -\frac{1}{x+2}$ vilket ger $G(x) = -\ln|x+2| = -\ln(x+2)$ (då $x > -2$), varför IF $= e^{-\ln(x+2)} = \frac{1}{x+2}$. Multiplikation med IF ger

$$\begin{aligned}
y' - \frac{1}{x+2}\cdot y = x^2-4 &\iff \frac{1}{x+2}\cdot y' - \frac{1}{(x+2)^2}\cdot y = \frac{x^2-4}{x+2} \\
&\iff \left(\frac{1}{x+2}\cdot y\right)' = x-2 \\
&\iff \frac{1}{x+2}\cdot y = \int (x-2)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + C \\
&\iff y = \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 2x + C\right)\cdot(x+2)
\end{aligned}$$

Villkoren $y(0) = 4$ ger

$$4 = y(0) = (0 - 0 + C)\cdot(0+2) = 2C \iff C = 2.$$

Lösningen är alltså

$$y = \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2\right)\cdot(x+2) = \tfrac{1}{2}(x-2)^2(x+2).$$

4. a)

Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot e^{2x} - \sin(x) - \ln(1+2x^2)}{x^3}$

Standardutvecklingarna ger

$$\begin{aligned}
e^{2x} &= 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + x^3\cdot B_1(x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3\cdot B_1(x),\\
\sin(x) &= x - \tfrac{1}{6}x^3 + x^4\cdot B_2(x),\\
\ln\big(1+2x^2\big) &= 2x^2 + x^4\cdot B_3(x).
\end{aligned}$$

Insättning av dessa ger

$$\begin{aligned}
x\cdot e^{2x} - \sin(x) - \ln(1+2x^2) &= x\cdot\big(1 + 2x + 2x^2 + x^3\cdot B_1(x)\big) - \big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + x^4\cdot B_2(x)\big)\\
&\quad - \big(2x^2 + x^4\cdot B_3(x)\big)\\
&= x + 2x^2 + 2x^3 - x + \tfrac{1}{6}x^3 - 2x^2 + x^4\cdot B_4(x)\\
&= \tfrac{13}{6}x^3 + x^4\cdot B_4(x).
\end{aligned}$$

Gränsvärdet är alltså

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{2x} - \sin(x) - \ln(1+2x^2)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{13}{6}x^3 + x^4\cdot B_4(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\tfrac{13}{6} + x\cdot B_4(x) = \tfrac{13}{6}.$$

b) Enligt definitionen av det generaliserade integral gäller

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty}\int_1^X \frac{1}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Partialbråksansatsen blir

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Multiplikation med $x^2(x+1)$ ger

$$\begin{aligned}
1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2 &\iff (A+C)x^2 + (A+B)x + (B-1) = 0\\
&\iff A + C = 0,\quad A + B = 0,\quad B - 1 = 0\\
&\iff B = 1,\quad A = -1,\quad C = 1.
\end{aligned}$$

Vi har alltså

$$\begin{aligned}
\int_1^X \frac{1}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^X -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\
&= \left[-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1|\right]_1^X\\
&= \left[\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x}\right]_1^X\\
&= \ln\left(\frac{X+1}{X}\right) - \frac{1}{X} - \ln(2) + 1\\
&= \ln\big(1 + {}^{1}\!/_{X}\big) - \tfrac{1}{X} - \ln(2) + 1.
\end{aligned}$$

Integralets värde är alltså

$$\lim_{X\to\infty} \ln\left(1+{}^{1}/{X}\right) - \tfrac{1}{X} - \ln(2) + 1 = \ln(1+0) - 0 - \ln(2) + 1 = 1 - \ln(2).$$

Generaliserade integralen är alltså konvergent med värdet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \ln(2).$$

5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' - 3y' = e^{3x}\cdot(6x-1), \qquad y(0)=3,\ y'(0)=2.$$

Vi betraktar differentialekvationen

$$y'' - 3y' = e^{3x}\cdot(6x-1). \tag{2}$$

Karakteristiska ekvationen är $r^2 - 3r = 0$ som har rötterna $r=0$ och $r=3$. Detta ger enligt Sats 15.2 lösningen

$$y_h = C_1\cdot e^{0x} + C_2\cdot e^{3x} = C_1 + C_2\cdot e^{3x}$$

till den homogena ekvationen $y'' - 3y' = 0$.

För att hitta en partikulärlösning till (2) sätts $y = z\cdot e^{3x}$ varav

$$y' = z'\cdot e^{3x} + z\cdot e^{3x}\cdot 3 = (z'+3z)\cdot e^{3x}$$

och

$$y'' = (z''+3z')\cdot e^{3x} + (z'+3z)\cdot e^{3x}\cdot 3 = (z''+6z'+9z)\cdot e^{3x}.$$

Insättning i (2) ger

$$(z''+6z'+9z)\cdot e^{3x} - 3(z'+3z)\cdot e^{3x} = e^{3x}\cdot(6x-1) \iff z''+3z' = 6x-1.$$

Ansatsen $z = x(Ax+B) = Ax^2+Bx$ ger $z' = 2Ax+B$ och $z'' = 2A$. Insättning ger

$$2A + 3(2Ax+B) = 6x-1 \iff A=1, \quad B=-1.$$

Detta ger partikulärlösningen $y_p = (x^2-x)\cdot e^{3x}$ till (2), som alltså har den fuldständiga lösningen

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2\cdot e^{3x} + (x^2-x)\cdot e^{3x} = C_1 + \left(x^2 - x + C_2\right)e^{3x}.$$

Derivation ger

$$\begin{aligned} y' &= 0 + (2x-1)\,e^{3x} + \left(x^2-x+C_2\right)e^{3x}\cdot 3 \\ &= \left(2x-1+3x^2-3x+3C_2\right)e^{3x} \\ &= \left(3x^2-x+3C_2-1\right)e^{3x}. \end{aligned}$$

Villkoren $y(0) = 3$ och $y'(0) = 2$ ger

$$\begin{cases} C_1 + (0 - 0 + C_2) \cdot e^0 &= 3 \\ (0 - 0 + 3C_2 - 1) \cdot e^0 &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 &= 3 \\ 3C_2 &= 3 \end{cases}$$

varav $C_2 = 1$ och $C_1 = 2$. Lösningen blir alltså

$$y(x) = \left(x^2 - x + 1\right) e^{3x} + 2.$$

6. Taylorpolynomet till $f(x)$ av ordning 2 kring punkten e ges enligt definitionen av

$$p_2(x) = f(e) + f'(e) \cdot (x - e) + \frac{f''(e)}{2} \cdot (x - e)^2.$$

Vi måste alltså bestämma värden $f(e)$, $f'(e)$ och $f''(e)$. Insättning av $x = e$ ger

$$f(e) = \int_{e^3}^{e^3} \frac{1}{\ln(t)} \, \mathrm{d}t = 0.$$

Analysens huvudsats ger

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(x^3)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = 3x^2 \cdot \frac{1}{3\ln(x)} = \frac{x^2}{\ln(x)}, \tag{3}$$

varav

$$f'(e) = \frac{e^2}{\ln(e)} = e^2.$$

Derivation av (3) ger

$$f''(x) = \frac{2x \cdot \ln(x) - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{x}{(\ln(x))^2}(2 \cdot \ln(x) - 1),$$

varav

$$f''(e) = \frac{e}{(\ln(e))^2}(2 \cdot \ln(e) - 1) = e.$$

Taylorpolynomet är alltså

$$p_2(x) = 0 + e^2 \cdot (x - e) + \frac{e}{2} \cdot (x - e)^2 = e^2 \cdot (x - e) + \frac{e}{2} \cdot (x - e)^2.$$