

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2x} = 0$, ty $\sin x$ är begränsad och $2x \rightarrow \infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{\arctan x} = \frac{5}{\frac{\pi}{2}} = \frac{10}{\pi}.$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x^{31} + 3^x}{1 - 3^x + x^{31}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{3^x} - \frac{3x^{31}}{3^x} + 1}{\frac{1}{3^x} - 1 + \frac{x^{31}}{3^x}} = \frac{0 - 0 + 1}{0 - 1 + 0} = -1.$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x^{31} + 3^x}{1 - 3^x + x^{31}} = \frac{1 - 3 + 3}{1 - 3 + 1} = -1.$

2. a) $D(2 - 3x^2)^4 = 4(2 - 3x^2)^3 \cdot (-6x) = -24x(2 - 3x^2)^3$

b) $D(e^{2x} \cdot \sin x) = 2e^{2x} \cdot \sin x + e^{2x} \cdot \cos x = e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$

c) $D \frac{1 + \ln x}{x} = \frac{(1 + \ln x)' \cdot x - (1 + \ln x) \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$

d) $D 2 \arctan \sqrt{x} = 2 \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = 2 \frac{1}{1 + x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1 + x)}$

3. a) $\left| \frac{(3+i)15i}{(1+2i)^4(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)} \right| = \frac{\sqrt{3^2+1^2} \cdot 15}{(\sqrt{1^2+2^2})^4 \cdot \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}} = \frac{\sqrt{10} \cdot 15}{5^2 \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 3}{5 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5 \cdot 2} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$

b) $z = \sqrt{3} + 3i$ skall skrivas på formen $z = re^{i\theta}$, vi går via sambandet

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$, där

$r = |z| = |\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Vi får

$z = \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, dvs $\cos \theta = \frac{1}{2}$ och $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vi ser

att $\theta = \frac{\pi}{3}$. Talet z på polär form blir $z = 2\sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

c) $(z+i) \cdot (7+z^2+24i) = 0 \Leftrightarrow z+i=0$ eller $7+z^2+24i=0$

1. $z+i=0 \Leftrightarrow z=-i$

2. $7+z^2+24i=0 \Leftrightarrow z^2 = -7-24i$. Sätt $z = a+bi$. Man får då

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 & (1) \\ 2ab = -24 & (2) \\ a^2 + b^2 = 25 & (3) \end{cases}$$

(1)+(3) ger $2a^2 = 18 \Leftrightarrow a = \pm 3$. Insättning i (2) ger $a=3, b=-4$ och $a=-3, b=4$

Rötterna är $z=3-4i, z=-3+4i$.

Svar: $z=-i, z=3-4i, z=-3+4i$

4. a) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{3k} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^3)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 8^k = \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \cdot \frac{8^{n+1} - 1}{8 - 1} = \infty \Rightarrow \text{divergent.}$

Alternativ: Kvoten $= 8 > 1 \Rightarrow$ Serien är divergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (3^{-2})^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{9}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{9} \cdot \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^n - 1}{\frac{1}{9} - 1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{0 - 1}{-\frac{8}{9}} = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k} \text{ är konvergent med summan } \frac{1}{8}.$$

b) Tangentens ekvation är $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, där $x_0 = -2$ och

normalens ekvation är $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.

$$y_0 = (-2)^2 \cdot \cos(-2+2) = 4 \cos 0 = 4.$$

Vi bestämmer

$$f'(x) = Dx^2 \cdot \cos(x+2) = 2x \cdot \cos(x+2) - x^2 \cdot \sin(x+2) \Rightarrow f'(-2) = -4.$$

Insättning i **tangentens** ekvation ger $y - 4 = -4 \cdot (x + 2) \Leftrightarrow y = -4x - 4$.

Ekvationen för **normalen** blir $y - 4 = -\frac{1}{-4} \cdot (x + 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$.

5. $y = \frac{x+2}{(x-1)^2}$, $D_f = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$.

1. Lodräta asymptoter kan finnas i $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{(x-1)^2} = +\infty, \text{ d.v.s. } x = 1 \text{ är en lodrät asymptot.}$$

2. Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{nämnarens grad är} \\ \text{högre än täljarens} \end{array} \right| = 0 \text{ och}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{nämnarens grad är} \\ \text{högre än täljarens} \end{array} \right| = 0, \text{ d.v.s. } y = 0 \text{ är en vågrät asymptot}$$

då $x \rightarrow +\infty$ och $x \rightarrow -\infty$.

$$3. y' = \frac{(x-1)^2 - (x+2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1) \cdot (x-1-2(x+2))}{(x-1)^4} = \frac{-x-5}{(x-1)^3}.$$

$$\text{Stationära punkter: } f'(x) = 0 \Rightarrow -x-5 = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

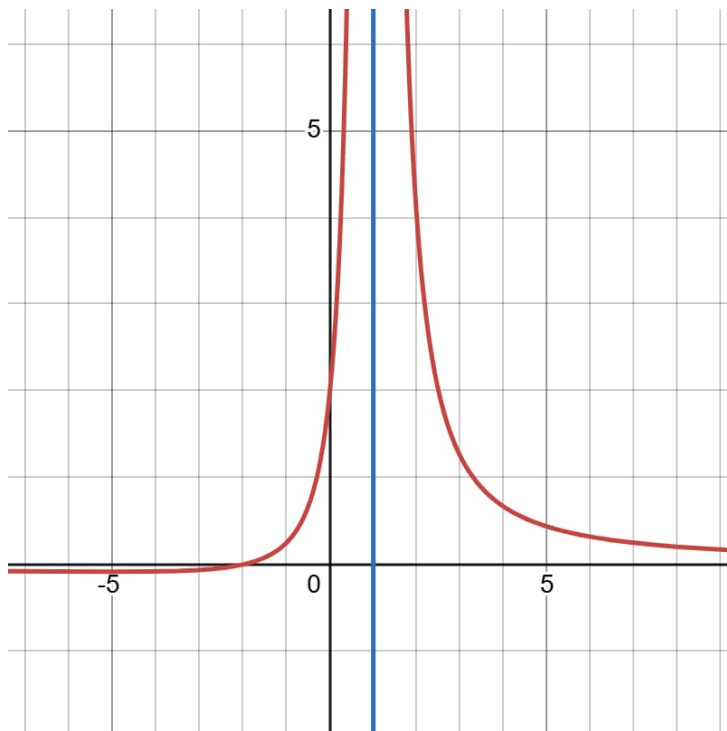
Teckenschema:

x		-5		1	
$f'(x)$	-	0	+	ej def.	-
$f(x)$		lok.min -1/12		ej def.	

3) Skärningspunkter med y-axeln: $x = 0 \Rightarrow y = 2$.

$$\text{Med x-axeln: } y = 0 \text{ ger } \frac{x+2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

4) Rita kurvan.



6. Kanotisten träffar stranden i punkten T.

Sätt $AT = x$ då får man $ST = \sqrt{(2+x)^2 + 16}$ och $MT = \sqrt{(5-x)^2 + 9}$.

Paddelsträckan(som funktion av x) blir $f(x) = ST + MT = \sqrt{(2+x)^2 + 16} + \sqrt{(5-x)^2 + 9}$.

Vi förenklar och får $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 20} + \sqrt{x^2 - 10x + 34}$

$$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 20}} + \frac{x-5}{\sqrt{x^2 - 10x + 34}} = 0. \quad \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 20}} = -\frac{x-5}{\sqrt{x^2 - 10x + 34}}.$$

Kvadrera båda leden:

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)^2}{x^2 + 4x + 20} &= \frac{(x-5)^2}{x^2 - 10x + 34} \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2 - 10x + 34) = (x-5)^2(x^2 + 4x + 20) \\ \Leftrightarrow x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 96x + 136 &= x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 100x + 500 \Leftrightarrow 7x^2 - 196x + 364 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 28x + 52 &= 0 \Leftrightarrow x = 2, \quad x = 26 \text{ förkastas, ty } AT \leq 3. \end{aligned}$$

Vi gör teckenschema:

x		2	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	Lokalt minimum	$\nearrow$

Svar: Kanotisten skall träffa stranden 2 km från punkten A.