LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
ANALYS 1
2024-04-11

1. a) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\cos 3x}=\frac{0}{1}=0$, b) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot 3x}{3\cdot\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}$,

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{7^x-x+1}{x^7+7^{x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7^x}{7^{x+1}}-\frac{x}{7^{x+1}}+\frac{1}{7^{x+1}}}{\frac{x^7}{7^{x+1}}+\frac{7^{x+1}}{7^{x+1}}}=\frac{\frac{1}{7}-0+0}{0+1}=\frac{1}{7}$,

d) $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{5t}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{5}\cdot\frac{e^t-1}{t}=\frac{1}{5}\cdot 1=\frac{1}{5}$,

e) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{2n}=\left(1^\infty\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{2n\cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

2. a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{7}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{n-2+1}-1}{\frac{3}{7}-1}=\frac{9}{49}\cdot\frac{0-1}{-\frac{4}{7}}=\frac{9}{28}$.

b) $\left(2+x\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\cdot 2^{12-k}\cdot x^k$.

Eftersom man är intresserad av koeff. för x^5 ser man att $k=5$.

Koefficienten blir $\binom{12}{5}\cdot 2^7=12\cdot 33\cdot 2^8=101376$.

c) $f(x)=\sqrt{5x+1}$ har $D_f\,:\,0\le x\le 3,\quad V_f\,:1\le y\le 4$.

Lös ut $x\,:\,y=\sqrt{5x+1}\Leftrightarrow y^2=5x+1\Leftrightarrow 5x=y^2-1\Leftrightarrow x=\frac{y^2-1}{5}$.

D.v.s. $f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{5}$ med $D_{f^{-1}}\,:\,1\le x\le 4$.

3. a) $|z|=\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{5i\cdot(2+2i)}\right|=\frac{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}{5\cdot\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{2}{5\cdot\sqrt{8}}=\frac{2}{5\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

$\arg z=\arg(1+i\sqrt{3})-\arg(5i)-\arg(2+2i)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{12}$.

b) Lös ekvationen $z^2+2iz=-6-24i$. Kvadratkomplettera V.L.

$(z+i)^2-i^2=-6-24i \Leftrightarrow (z+i)^2=-7-24i$. Sätt $z+i=a+ib$. Man får då

$$\begin{cases} a^2-b^2=-7 & (1) \\ 2ab=-24 & (2) \\ a^2+b^2=25 & (3) \end{cases}$$

(1)+(3) ger $2a^2=18 \Leftrightarrow a^2=9 \Leftrightarrow a=\pm 3$. Insättning i (2) ger $a=3, b=-4$ och $a=-3, b=4$.

Då har vi att $z+i=3-4i$ eller $z+i=-3+4i$. Vi löser ut z och får $z=3-5i,\ z=-3+3i$.

Svar: $z=3-5i,\ z=-3+3i$.

4. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-x-2}$ $\quad D_f: x^2-x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$ och $x\neq 2$

1) Lodräta asymptoter kan finnas i $x=-1$ och $x=2$

Vi faktoriserar nämnaren:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-x-2}=\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}=\left[\frac{1}{0^+\cdot(-3)}\right]=-\infty,\quad \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}=\left[\frac{1}{0^-\cdot(-3)}\right]=\infty,$$

d.v.s. $x=-1$ är en lodrät asymptot.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}=\left[\frac{4}{3\cdot 0^+}\right]=\infty,\quad \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}=\left[\frac{4}{3\cdot 0^-}\right]=-\infty,$$

d.v.s. $x=2$ är en lodrät asymptot.

Vågräta asymptoter: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=1$ och $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=1$

d.v.s. $y=1$ är en vågrät asymptot då $x\to+\infty$ och $x\to-\infty$.

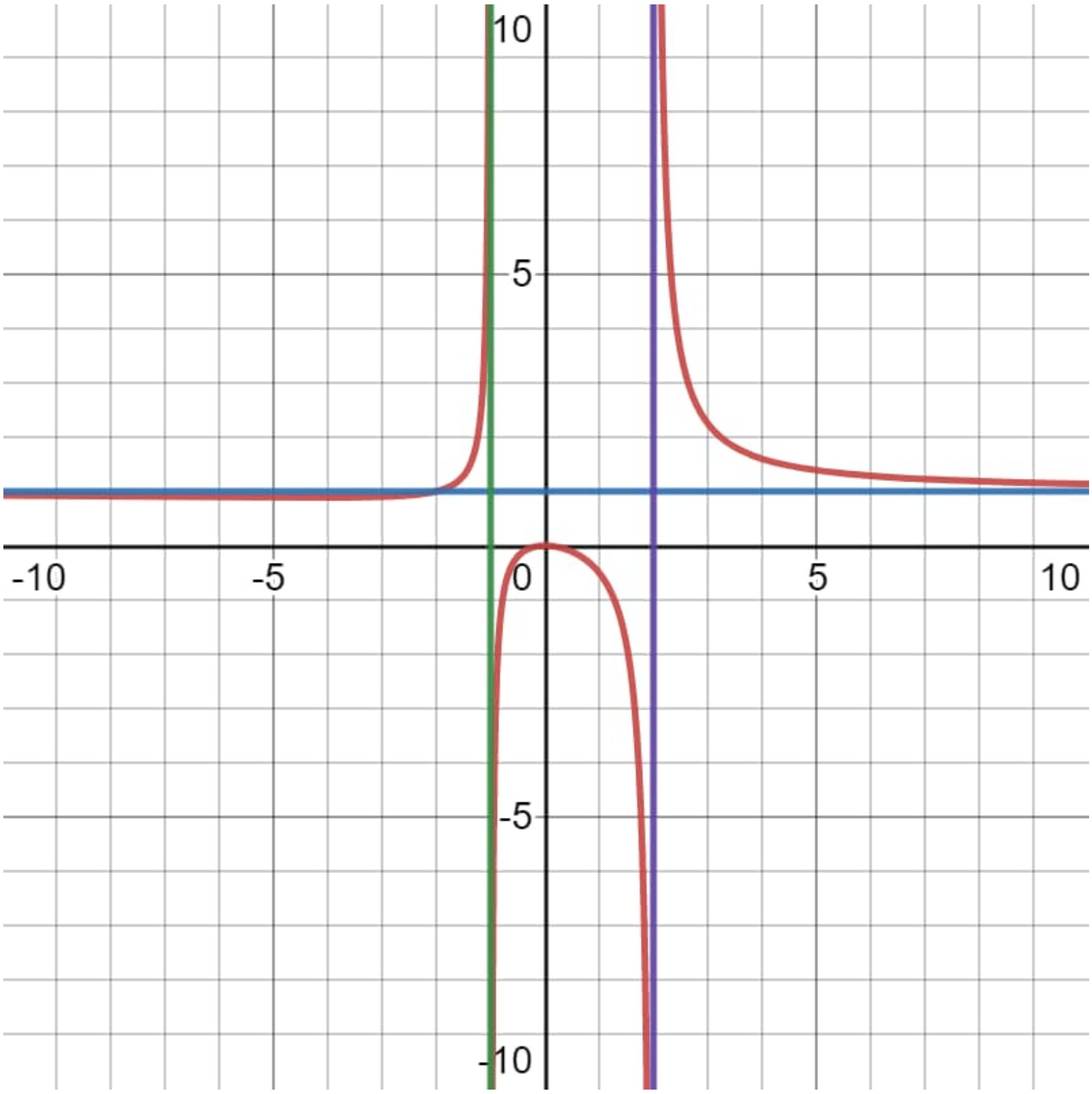
2) Derivatan blir $f'=\dfrac{-x^2-4x}{(x^2-x-2)^2}=\dfrac{-x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$.

3) Stationära punkter: $f'(x)=0$ ger $x=0$ eller $x=-4$

4) Teckenschema

x		-4		-1		0		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$		$-$
$f(x)$	↘	Lok.min	↗	Odef.	↗	Lok.max	↘	Odef.	↘

$f(-4)=\frac{8}{9}$ är ett lokalt minimum, lokalt minimum i $f(0)=0$



5. a) $f(x)=2\sqrt{x}+\arctan 2x$, $f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2=x^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{1+4x^2}$.

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}} + 2\cdot(-1)\left(1+4x^2\right)^{-2}\cdot 8x = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{16x}{\left(1+4x^2\right)^2}.$$

$$f''(1) = -\frac{1}{2} - \frac{16}{(1+4)^2} = -\frac{1}{2} - \frac{16}{25} = -\frac{57}{50}.$$

b) $f'(x) = \left(\ln x + \frac{e}{x}\right)' = \frac{1}{x} + e(x^{-1})' = \frac{1}{x} - \frac{e}{x^2} = \frac{x-e}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ (ligger i intervallet $\left[\,1,\ e^2\,\right]$)

Då f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $\left[1, e^2\right]$ måste f ha ett största och ett minsta värde som antas i någon av punkterna 1, e eller e^2.

$f(1) = e$, $f\left(e\right) = \ln e + \frac{e}{e} = 2$ eller $f\left(e^2\right) = \ln e^2 + \frac{e}{e^2} = 2 + \frac{1}{e}$.

Svar: Största värdet är $f\left(1\right) = e$ och minsta värdet är $f(e) = 2$.

6. Låt reservoarens korta sida vara a och dess djup h.

Volymen $V = 2a\cdot a\cdot h = 2a^2h \Leftrightarrow h = \frac{V}{2a^2}$.

Arean av reservoarens insida blir:

$$A = 2a\cdot a + 2\cdot a\cdot h + 2\cdot 2a\cdot h = 2a^2 + 6ah = 2a^2 + 6a\cdot\frac{V}{2a^2} = 2a^2 + \frac{3V}{a}.$$

Arean av reservoarens insida som funktion av a blir:

$A(a) = 2a^2 + \frac{3V}{a}$. Vi får $A'(a) = 4a - \frac{3V}{a^2} = \frac{4a^3 - 3V}{a^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a^3 - 3V = 0 \Leftrightarrow a^3 = \frac{3V}{4}$. Med volymen $V = 972\ \mathrm{m}^3$ får vi

$$a^3 = \frac{3\cdot 972}{4} = 3\cdot 243 = 729 = 9^3 \Leftrightarrow a = 9.$$

Teckenschema

a		9	
$A'(a)$	-	0	+
$A(a)$	$\searrow$	$A(9)$	$\nearrow$

Arean av reservoarens insida blir minimal då

$a = 9$ och $h = \frac{972}{2\cdot 81} = \frac{12\cdot 81}{2\cdot 81} = 6.$

Svar: Reservoarens sidor är 9 respektive 18 m och höjden 6 m.