**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA** **SVAR OCH ANVISNINGAR**
**MATEMATIK** **ANALYS 1**
**Helsingborg** **2022-08-26**

1.a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{x^2-9}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{(x-3)\cdot(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+3}=0$

b) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\cdot(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$

c) $\lim_{t\to 0}\frac{5t}{e^{2t}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{5}{2}\cdot\frac{2t}{e^{2t}-1}=\frac{5}{2}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x\cdot\cos x}=\left|\frac{\sin x}{x}\to 1, \cos x\to 1, \text{ då } x\to 0\right|=\frac{1}{4}.$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n}=\left|\textit{använd } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{2}=e^2.$

2. a) $|z|=\left|\frac{(-2-2i)\cdot 7i}{1+i\sqrt{3}}\right|=\frac{|-2-2i|\cdot|7i|}{|1+i\sqrt{3}|}=7\sqrt{2}$, $\arg z=\arg(-2-2i)+\arg(7i)-(1+i\sqrt{3})=$

$=\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{17\pi}{12}$. Alt. $\arg z=-\frac{7\pi}{12}$.

b) $z^2+4z+1+4i=0$. Kvadratkomplettera: $(z+2)^2-2^2+1+4i=0$
$\Leftrightarrow (z+2)^2-3+4i=0 \Leftrightarrow (z+2)^2=3-4i$.
Sätt $z+2=x+iy$. Man får då

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 & (1)\\ 2xy=-4 & (2)\\ x^2+y^2=5 & (3)\end{cases}$$

(1)+(3) ger $2x^2=8\Leftrightarrow x=\pm 2$. Insättning i (2) ger $x=2, y=-1$ och $x=-2, y=1$.
Då har vi att $z+2=2-i$ och $z+2=-2+i$. Vi löser ut $z$ och får

Svar: $z=-i,\ z=-4+i$.

3. a) $D\left(2-\frac{x}{7}\right)^{14}=14\left(2-\frac{x}{7}\right)^{13}\cdot\left(2-\frac{x}{7}\right)'=14\left(2-\frac{x}{7}\right)^{13}\cdot\frac{-1}{7}=-2\left(2-\frac{x}{7}\right)^{13}$

b) $D(x^2\cdot\cos 3x)=2x\cos 3x-3x^2\sin 3x$.

c) $De^{\sqrt{1+2x}} = e^{\sqrt{1+2x}} \cdot D\sqrt{1+2x} = e^{\sqrt{1+2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+2x}} \cdot (1+2x)' = e^{\sqrt{1+2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$

d) $D\left(\arctan\frac{7}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{7}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{7}{x}\right)' = \frac{1}{\frac{x^2+49}{x^2}} \cdot (7x^{-1})' = \frac{x^2}{x^2+49} \cdot \frac{-7}{x^2} = -\frac{7}{x^2+49}$.

4. $y = \frac{x^2}{x+1}$, $D_f = \{x \in R, x \neq -1\}$.

1. Lodräta asymptoter kan finnas i $x = -1$ .

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = \left(\frac{(-1)^2}{0^+}\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = \left(\frac{(-1)^2}{0^-}\right) = -\infty,$$

d.v.s. $x = 1$ är en lodrät asymptot.

2. Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\frac{x^2}{x+1} \approx \frac{x^2}{x} = x, \text{ då } x \to \infty\right| = \infty \quad \text{och}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\frac{x^2}{x+1} \approx \frac{x^2}{x} = x, \text{ då } x \to -\infty\right| = -\infty$$

Inga vågräta asymptoter då $x \to +\infty$ och $x \to -\infty$.

3. Sneda asymptoter: $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x+1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1,$

samma gäller då $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{2}{x} - 3\ln x - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

samma gäller då $x \to -\infty$. Sned asymptot är $y = x - 1$, då $x \to \pm\infty$.

Alt. Lösning: Sned asymptot kan bestämmas med hjälp av polynomdivision, se s. 244-255 (10.29)

4. $y' = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Stationära punkter: $f'(x) = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$.

**5.**Teckenschema:

| $x$ | | -2 | | -1 | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | – | | – | | + |
| $f(x)$ | ↗ | Lok.max | ↘ | Ej def. | ↘ | Lok.min | ↗ |

Lokalt maximum i $(-2,-4)$, lokalt minimum i (0,0).

**6.** Rita kurvan.

5.a) Lös ekvationen $f(x)+\frac{1}{2}f''(x)=\frac{1}{4}$ där $f(x)=\sin^2 x$.

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$ och $f''(x)=2\cos 2x$.

Ekvationen blir

$$\sin^2 x+\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{1}{2}$$

1) $\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+n2\pi,\ n\in Z.$

2) $\cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi,\quad n\in Z.$

Detta kan sammanfattas som $x=\pm\frac{\pi}{3}+n\pi,\quad n\in Z.$

Svar: $x=\pm\frac{\pi}{3}+n\pi,\quad n\in Z.$

b) Lös ekvationen $\ln(3-x)+\ln(1-x)-\ln 8=0 \Leftrightarrow x=-1,\ x=5$ (falsk rot). Skärningen i (-1,0). $f'(x)=\frac{-1}{3-x}-\frac{1}{1-x} \Rightarrow f'(-1)=-\frac{3}{4}$. Tangentens ekvation är $y=-\frac{3}{4}(x+1)$.

Svar: $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$

6.Linjen $y=kx+m$ går genom punkterna $(1,4):4=k\cdot 1+m$, $(a,0):0=k\cdot a+m \Leftrightarrow a=-\frac{m}{k}$

$(0,b):b=m$. Detta ger $a=\frac{b}{b-4}$. Arean $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{b-4}, b>4$.

$A'(b)=\frac{1}{2}\cdot\frac{b(b-8)}{(b-4)^2}=0 \Leftrightarrow b=8, b=0$ (falsk, ty b>4). Teckenschemat visar att i $b=8$ ger lokalt minimum. Triangelns area blir minimal $A=8$ a.e. då linjens ekvation är $y=-4x+8$.